9.1. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $g \in L^\infty(\mu)$, und $T\colon L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ eine Funktion, so dass $T(f) = fg$, wobei $1 \le p \le \infty$. Sei $||T||_{L^p} = \sup\limits_{0 \neq f \in L^p} \frac{\|T(f)\|_{L^p}}{\|f\|_{L^p}}$ die Norm von T. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) T ist wohldefiniert, d.h. $T(f) \in L^p$ für alle $f \in L^p$.

(b) Ist μ σ-semiendlich, dann ist $\|T\|_{L^p} = \|g\|_{L^\infty}$.

9.2. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum. Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmässig beschränkt in $\mathcal{L}^1(\mu)$, aber $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmässig intergrierbar ist.

Bemerkung: In Serie 8, Aufgabe 1, nehmen wir an, dass $\frac{G(t)}{t} \to \infty$ für $t \to \infty$. Für $G(t) = t$, gilt $\frac{G(t)}{t} = 1$.

(b) Es existiert eine Folge $(f_n)_{n\in N}$ mit $\liminf\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu = +\infty$ (f_n^-) gleichmässig intergrierbar, aber $\int \liminf\limits_{n\to\infty} f_n d\mu$ ist nicht wohldefiniert, d.h. $\int \liminf\limits_{n\to\infty} f_n d\mu = \infty - \infty$.

9.3. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$.

(a) Nehmen Sie $\mu(\Omega) < \infty$ an und zeigen Sie, dass

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

gilt.

(b) Sei jetzt Ω nur μ-σ-endlich. Wie sollte man die vorherige Gleichung modifizieren?

9.4. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum. Zeigen Sie: μ ist σ-endlich genau dann, wenn es für jedes $1 \le q < \infty$ ein $g_q \in L^q(\mu)$ mit $g_q > 0$ μ-f.ü. gibt.

Abgabetermin:
Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Dienstag, 02.05.2017.

Allgemeine Informationen sind unter:
`http://metaphor.ethz.ch/x/2017/fs/401-2284-00L/`