MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 1 – LÖSUNG

1. Aufgabe: Symmetriegruppe des Würfels

Sei W ein Würfel im $\mathbb{R}^3$. Sei I eine Isometrie des Würfels W, also eine Isometrie des $\mathbb{R}^3$ mit Euklidischer Metrik, die W auf W abbildet. Sei p der Mittelpunkt des Würfels. Wir behaupten, dass p ein Fixpunkt von I ist. Die Isometrie I bildet Ecken auf Ecken ab. Da p der einzige Punkt ist, der von allen Ecken denselben Abstand hat, folgt $I(p) = p$. Nun können wir den Hinweis anwenden und finden, dass I eine der folgenden Abbildungen ist:

- Eine Drehung um eine Achse durch p um einen Winkel $\alpha \in (0, 2\pi)$.
- Eine Spiegelung an einer Ebene durch p.
- Die Punktspiegelung an p.
- Eine Hintereinanderschaltung der Punktspiegelung an p mit einer Drehung um eine Achse durch p um einen Winkel $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.
- Die Identität.

Wir machen eine Fallunterscheidung:

(1) I ist die Identität. Dies ist offensichtlich eine Isometrie des Würfels W.
(2) I ist die Punktspiegelung an p. Diese Abbildung bildet ebenfalls W nach W ab.
(3) I ist eine Drehung um p um eine Achse A durch p mit Winkel $\alpha \in (0, 2\pi)$. Sei Q ein Punkt in $W \cap A$. Wir haben drei Fälle:
  (a) Q liegt im Inneren einer Seitenfläche: Da $I(W) = W$, ist Q der Mittelpunkt jener Seitenfläche und $\alpha \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$.
  (b) Q liegt auf einer Kante, nicht aber auf einer Ecke des Würfels: Q muss also in der Mitte der Kante liegen und $\alpha = \pi$.
  (c) Q ist eine Ecke: Hier muss $\alpha \in \{2\pi/3, 4\pi/3\}$, damit der Würfel auf sich selbst abgebildet wird.

  Im ersten Fall gibt es drei mögliche Achsen A, im zweiten sechs und im dritten vier. Es gibt also genau $3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 23$ Drehungen um p um eine Achse A durch p mit Winkel $\alpha \in (0, 2\pi)$.
(4) I ist eine Spiegelung an einer Ebene E durch p: Sei S eine Seitenfläche des Würfels, die E durchstösst. Die Spiegelung I bildet nun S auf sich selbst ab. Also ist enthält $S \cap E$ entweder zwei auf S gegenüberliegende Ecken, oder zwei auf S gegenüberliegende Kantenmittelpunkte. Das Eckenpaar oder Kantenmittelpunktpaar bestimmt die Durchstosslinie $E \cap S$ und damit auch E, da $p \in E$. Also ist E entweder
  (a) eine Spiegelung an einer Ebene durch die Mittelpunkte von vier parallelen Kanten, oder
  (b) eine Spiegelung an einer Ebene durch zwei im Würfel gegenüberliegende Kanten.

  Von der ersten Sorte gibt es drei, von der zweiten Sorte gibt es sechs. Also gibt es $3 + 6 = 9$ Spiegelungen an einer Ebene durch p, die den Würfel auf sich abbilden.
(5) I ist von der Form $I = P \circ D$, wobei P die Punktspiegelung an p ist und D eine Drehung um eine Achse durch p um einen Winkel $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$. Auch $D = P \circ I$ ist nun eine Isometrie des Würfels. Also ist D von der Art wie in Fall (3) beschrieben, allerding mit Winkel $\neq \pi$. Davon gibt es $2 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 14$ verschiedene. Damit haben wir 14 Isometrien der Form $I = P \circ D$ gefunden, wobei D eine Drehung um eine Achse durch p um einen Winkel $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ ist.

Die Fallunterscheidung ist vollständig und wir haben insgesamt genau

$$1 + 1 + 23 + 9 + 14 = 48$$

paarweise verschiedene Isometrien des Würfels gefunden. Diese bilden unter Hintereinanderschaltung die Isometriegruppe des Würfels.

2. Aufgabe: Zweimal invertieren

Sei $g \in G$. Es gilt nach Voraussetzung an das Inverse von g:

$$gg^{-1} = g^{-1}g = 1.$$

Das ist allerdings gerade die Bedingung an g, das Inverse von $g^{-1} \in G$ zu sein. Da es nur ein Inverses von g^{-1} gibt, folgt $\left(g^{-1}\right)^{-1} = g$.

3. Aufgabe: Permutationen

Es gilt

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Ferner

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$