MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 2 – MUSTERLÖSUNG

1. Aufgabe: Gruppenautomorphismen und Produkte von Gruppen

(1) Die bijektiven Abbildungen einer beliebigen Menge auf sich selbst bilden eine Gruppe unter Komposition. Das neutrale Element ist die Identitätsabbildung und das inverse Element zu einer Abbildung ist die inverse Abbildung.

Es genügt also zu zeigen, dass $\mathrm{Aut}(G)$ eine Untergruppe der Gruppe der bijektiven Abbildungen $G \to G$ ist. Die Identitätsabbildung id ist in $\mathrm{Aut}(G)$, da sie bijektiv ist und $\mathrm{id}(g_1g_2) = g_1g_2 = \mathrm{id}(g_1)\mathrm{id}(g_2)$ erfüllt, also ein Automorphismus von G ist. Falls $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Aut}(G)$, dann ist auch $\phi_1 \circ \phi_2 \in \mathrm{Aut}(G)$, da diese Abbildung bijektiv ist und ein Homomorphismus ist:

$$\phi_1 \circ \phi_2(g_1g_2) = \phi_1(\phi_2(g_1g_2)) = \phi_1(\phi_2(g_1)\phi_2(g_2)) = \phi_1(\phi_2(g_1))\phi_1(\phi_2(g_2)) = \phi_1 \circ \phi_2(g_1)\phi_1 \circ \phi_2(g_2).$$

Schliesslich folgt aus $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ auch $\phi^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$, da ϕ^{-1} ebenfalls bijektiv ist und ein Homomorphismus ist:

$$\phi^{-1}(g_1g_2) = \phi^{-1}(\phi(\phi^{-1}(g_1))\phi(\phi^{-1}(g_2))) = \phi^{-1}(\phi(\phi^{-1}(g_1)\phi^{-1}(g_2))) = \phi^{-1}(g_1)\phi^{-1}(g_2).$$

Wir haben also gezeigt, dass $\mathrm{Aut}(G)$ eine Untergruppe der Gruppe der bijektiven Abbildungen $G \to G$ ist. Damit ist $\mathrm{Aut}(G)$ selbst eine Gruppe.

(2) Das Produkt von zwei Elementen aus $G \times H$ ist offensichtlich wieder ein Element von $G \times H$. Wir überprüfen direkt die Axiome einer Gruppe:

- Assoziativität: Es gilt

$$\begin{aligned}\Big((g_1, h_1)(g_2, h_2)\Big)(g_3, h_3) &= (g_1g_2, h_1h_2)(g_3, h_3) = ((g_1g_2)g_3, (h_1h_2)h_3) \\ &= (g_1(g_2g_3), (h_1(h_2h_3)) = (g_1, h_1)(g_2g_3, h_2h_3) = (g_1, h_1)\Big((g_2, h_2)(g_3, h_3)\Big),\end{aligned}$$

  wobei wir die Assoziativität der Verknüpfungen in G und H verwendet haben.

- Neutrales Element: Seien 1_G und 1_H die neutralen Elemente von G und H. Dann ist $(1_G, 1_H)$ das neutrale Element in $G \times H$:

$$(1_G, 1_H)(g, h) = (1_G g, 1_H h) = (g, h) = (g1_G, h1_H) = (g, h)(1_G, 1_H).$$

- Das Inverse von $(g, h) \in G \times H$ ist (g^{-1}, h^{-1}):

$$(g, h)(g^{-1}, h^{-1}) = (gg^{-1}, hh^{-1}) = (1_G, 1_H) = (g^{-1}g, h^{-1}h) = (g^{-1}, h^{-1})(g, h)$$

(3) Es gilt $h_1\rho(g_1)(h_2) \in H$, also ist die Multiplikation $(H \rtimes_\rho G) \times (H \rtimes_\rho G) \to H \rtimes_\rho G$ wohldefiniert. Wir überprüfen wieder die Axiome:

- Assoziativität: Die Definition gibt:

$$\Big((h_1, g_1)(h_2, g_2)\Big)(h_3, g_3) = (h_1\rho(g_1)(h_2), g_1g_2)(h_3, g_3) = (h_1\rho(g_1)(h_2)\rho(g_1g_2)(h_3), (g_1g_2)g_3)$$

  Nun verwenden wir, dass $\rho(g_1g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)$ und erhalten

$$(h_1\rho(g_1)(h_2)\rho(g_1)\Big(\rho(g_2)(h_3)\Big), (g_1g_2)g_3)$$

  Nun verwenden wir, dass $\rho(g_1)$ ein Homomorphismus $H \to H$ ist und erhalten

$$\begin{aligned}(h_1\rho(g_1)\Big(h_2\rho(g_2)(h_3)\Big), (g_1g_2)g_3) = (h_1\rho(g_1)\Big(h_2\rho(g_2)(h_3)\Big), g_1(g_2g_3)) &= (h_1, g_1)(h_2\rho(g_2)(h_3), g_2g_3) \\ &= (h_1, g_1)\Big((h_2, g_2)(h_3, g_3)\Big)\end{aligned}$$

  was zu zeigen war.

- Neutrales Element: Da $\rho : G \to \mathrm{Aut}(H)$ ein Homomorphismus ist, gilt $\rho(1_G) = \mathrm{id}_H$. Also gilt
$$(1_H, 1_G)(h, g) = (1_H\rho(1_G)h, 1_Gg) = (\mathrm{id}_H(h), g) = (h, g).$$
Da $\rho(g) : H \to H$ ein Homomorphismus ist, gilt $\rho(g)(1_H) = 1_H$ und damit
$$(h, g)(1_H, 1_G) = (h\rho(g)(1_H), g1_G) = (h1_H, g) = (h, g).$$
Also ist $(1_H, 1_G)$ das neutrale Element.
- Inverses: Um das Inverse von (h, g) zu bestimmen müssen wir die Gleichungen
$$\begin{aligned}(h, g)(h', g') &= (1_H, 1_G)\\ (h', g')(h, g) &= (1_H, 1_G)\end{aligned}$$
nach h', g' lösen. Wir setzen die Definition der Multiplikation ein:
$$\begin{aligned}(h\rho(g)h', gg') &= (1_H, 1_G)\\ (h'\rho(g')h, g'g) &= (1_H, 1_G)\end{aligned}$$
Wir sehen, dass wir $g' = g^{-1}$ setzen müssen, damit die zweite Komponente in jeder Gleichung erfüllt ist. Es bleibt die erste Komponente:
$$\begin{aligned}h\rho(g)h' &= 1_H\\ h'\rho(g^{-1})h &= 1_H\end{aligned}$$
Die zweite Gleichung ergibt $h' = (\rho(g^{-1})(h))^{-1}$. Dies löst auch die erste Gleichung:
$$h\rho(g)(\rho(g^{-1})(h))^{-1} = h(\rho(g)(\rho(g^{-1})(h)))^{-1} = h(\rho(g)\circ\rho(g^{-1})(h))^{-1} = h(\rho(gg^{-1})(h))^{-1} = h(h)^{-1} = 1_H.$$
Also ist das Inverse von (h, g) durch
$$(h, g)^{-1} = \left(\left(\rho(g^{-1})(h)\right)^{-1}, g^{-1}\right)$$
gegeben.

2. Aufgabe: Normalteiler und Faktorgruppen

Wir verwenden die Notation aus dem Skript: $G = D_6 = \{1, R, R^2, R^3, R^4, R^5, S, RS, R^2S, R^3S, R^4S, R^5S\}$. Es gelten die Relationen $S^2 = 1$, $R^6 = 1$ und

$$SR = R^5S. \tag{1}$$

Wir haben also $H = \{1, R^2, R^4\}$.

(1) Wir müssen überprüfen, dass $\forall g \in G \forall h \in H \exists h' \in H : gh = h'g$. Für $g \in \{1, R, \dots, R^5\}$ ist dies klar, da diese g mit allen $h \in H$ vertauschen. Für $g = R^jS$ mit $j \in \{0, 5\}$ und $h = R^{2l}$ mit $l = \{0, 1, 2\}$ hingegen gilt mit Gleichung (1)
$$gh = R^jSR^{2l} = R^jR^{2l\cdot5}S = R^{10l}R^jS = h'g$$
mit $h' = R^{10l}$. Es gilt $h' \in H$, da $0 \equiv 0$, $10 \equiv 2$ und $20 \equiv 0$ modulo 4.

(2) Die Faktorgruppe G/H hat die Elemente $[g] = \{gh : h \in H\}$. Wir finden durch Rechnen mit Relation (1):
$$\begin{aligned}[1] &= \{1, R^2, R^4\} = [R^2] = [R^4]\\ [R] &= \{R, R^3, R^5\} = [R^3] = [R^5]\\ [S] &= \{S, R^2S, R^4S\} = [R^2S] = [R^4S]\\ [RS] &= \{RS, R^3S, R^5S\} = [R^3S] = [R^5S].\end{aligned}$$

Also besteht die Faktorgruppe G/H aus den vier Elementen $[1], [R], [S], [RS]$. Die Gruppenmultiplikation in G/H geht über die Repräsentanten. Z.B.:

$$[S][R] = [SR] = [R^5 S] = [RS].$$

Wir finden so die Gruppentabelle:

G/H	$[1]$	$[R]$	$[S]$	$[RS]$
$[1]$	$[1]$	$[R]$	$[S]$	$[RS]$
$[R]$	$[R]$	$[1]$	$[RS]$	$[S]$
$[S]$	$[S]$	$[RS]$	$[1]$	$[R]$
$[RS]$	$[RS]$	$[S]$	$[R]$	$[1]$

Wir wollen mit der Gruppenstruktur von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vergleichen. Wir verwenden die Notation $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ und erhalten die Gruppentabelle

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$
$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$
$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$
$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$
$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$

Wir sehen, dass $\phi : G/H \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned}
\phi([1]) &= (\overline{0},\overline{0}) \\
\phi([R]) &= (\overline{1},\overline{1}) \\
\phi([S]) &= (\overline{0},\overline{1}) \\
\phi([RS]) &= (\overline{1},\overline{0})
\end{aligned}$$

einen möglichen Isomorphismus liefert.

3. Aufgabe: Die Gruppe $SO(3)$

(1) Wir zeigen, dass $SO(3)$ eine Untergruppe von $GL(3,\mathbb{R})$ ist. Offensichtlich ist die Einheitsmatrix in $SO(3)$. Falls $A \in SO(3)$ so folgt $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$ und $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = 1^{-1} = 1$. Also ist auch $A^{-1} \in SO(3)$. Falls $A, B \in SO(3)$, so folgt $(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T \mathbb{I} B = B^T B = \mathbb{I}$. Ferner $\det(AB) = \det A \det B = 1$. Also ist auch $AB \in SO(3)$. Damit ist $SO(3)$ eine Untergruppe von $GL(3,\mathbb{R})$ und damit auch selbst eine Gruppe.

(2) Sei $A \in SO(3)$. Die Bedingung, eine Rotationsachse zu besitzen ist genau die Bedingung, dass 1 ein Eigenwert von A ist. Wir müssen also $\det(A - \mathbb{I}) = 0$ zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A - I) &= \det(A)\det(A - I) = \det(A^{-1})\det(A - I) = \det(A^{-1}(A - I)) \\
&= \det(I - A^{-1}) = \det(I - A^T) = \det((I - A)^T) = \det(I - A) = (-1)^3 \det(A - I) \\
&= -\det(A - I)
\end{aligned}$$

Also ist $\det(A - I) = 0$ und es existiert ein $v \neq 0$ mit $Av = v$.

(3) Sei $v \neq 0$.

(a) Sei $A \in SO(3)$. Es gilt für alle $B \in SO(3)$:

$$\begin{aligned}
B \in SO(3)_{Av} \Leftrightarrow BAv = Av \Leftrightarrow A^{-1}BAv = v \Leftrightarrow A^{-1}BA \in SO(3)_v \\
\Leftrightarrow B = A\Big(A^{-1}BA\Big)A^{-1} \in ASO(3)_v A^{-1}.
\end{aligned}$$

(b) Intuition: Die Drehgruppe $SO(2)$ rotiert $\mathbb{R}^3$ um die Achse v. Das ist genau das, was $SO(3)_v$ tut. Zunächst wollen wir das Problem einfacher machen, indem wir v auf die z–Achse rotieren: Sei $A \in SO(3)$ mit $Av = (0, 0, |v|) =: v_0$. Die Abbildung

$$\phi : SO(3)_v \to SO(3)_{Av} \qquad \phi(B) = ABA^{-1}$$

ist nach Teil (a) wohldefiniert und ferner ein Gruppenisomorphismus: ϕ ist bijektiv, die Inverse ist $B \mapsto A^{-1}BA$. ϕ ist Homomorphismus: $\phi(B_1B_2) = AB_1B_2A^{-1} = AB_1A^{-1}AB_2A^{-1} = \phi(B_1)\phi(B_2)$.

Wir wollen nun $SO(2)$ als Rotationsgruppe um die z–Achse verstehen: Wir definieren

$$\psi : SO(2) \to SO(3)_{v_0} \qquad \psi(A_0) = \begin{pmatrix} A_0 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist $\psi(A_0)^T = \psi(A_0^T) = \psi(A_0^{-1}) = \psi(A_0)^{-1}$ und $\det \psi(A_0) = \det A_0 = 1$. Auch gilt $\psi(A_0)v_0 = v_0$. Also ist ψ wohldefiniert. Ferner ist ψ ein Gruppenhomomorphismus: Es gilt $\psi(\mathbb{I}_2) = \mathbb{I}_3$ und

$$\psi(A_0)\psi(B_0) = \begin{pmatrix} A_0 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0B_0 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \psi(A_0B_0)$$

Der Gruppenhomomorphismus ψ ist offensichtlich injektiv. Wir behaupten, dass er auch surjektiv ist: Sei $B = (b_{ij})_{ij} \in SO(3)_{v_0}$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

Da die Spalten der orthogonalen Matrix B zueinander orthogonal stehen, folgt $b_{31} = b_{32} = 0$. Also

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir setzen $B_0 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Nun verwenden wir $B \in SO(3)$: Es gilt $\det B_0 = \det B = 1$ und

$$\mathbb{I} = B^T B = \begin{pmatrix} B_0^T B_0 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also auch $B_0^T B_0 = \mathbb{I}_2$. Also ist $B_0 \in SO(2)$ und $\psi(B_0) = B$. Also ist ψ bijektiv und damit ein Gruppenisomorphismus. Der gesuchte Gruppenisomorphismus $SO(2) \to SO(3)_v$ ist damit

$$\begin{aligned} \phi^{-1} \circ \psi :& SO(2) \to SO(3)_v \\ & B_0 \mapsto A^{-1} \begin{pmatrix} B_0 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \end{aligned}$$

4. Aufgabe: Eine Matrix–Gruppe

Wir zeigen, dass diese Matrizen eine Untergruppe der Gruppe der komplexen invertierbaren 2×2–Matrizen bilden.

Die Einheitsmatrix ist durch $\theta = \phi = \psi = 0$ realisiert und bildet das neutrale Element.

Durch rechnen findet man

$$A(\phi_1, \theta_1, \psi_1)A(\phi_2, \theta_2, \psi_2) = A(\phi, \theta, \psi)$$

falls

$$\begin{aligned} e^{ix}\cos(\alpha) &= e^{i(x_1+x_2)}\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - e^{i(y_2-y_1)}\sin\alpha_1\sin\alpha_2 \\ e^{iy}\sin(\alpha) &= e^{i(y_1+x_2)}\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + e^{i(y_2-x_1)}\cos\alpha_1\sin\alpha_2, \end{aligned}$$

wobei wir $x = \frac{\phi+\psi}{2}$, $y = \frac{\psi-\phi}{2}$ und $\alpha = \frac{\theta}{2}$ gesetzt haben (und analog x_i, y_i, α_i). Um zu zeigen, dass die $A(\phi,\theta,\psi)$ unter Multiplikation abgeschlossen sind, müssen wir also zeigen, dass diese Gleichungen nach $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ auflösbar sind. Das ist genau dann der Fall, wenn

(2)
$$|e^{i(x_1+x_2)}\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - e^{i(y_2-y_1)}\sin\alpha_1\sin\alpha_2|^2 + |e^{i(y_1+x_2)}\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + e^{i(y_2-x_1)}\cos\alpha_1\sin\alpha_2|^2 = 1,$$

da wir dann die beiden Gleichungen im Betrag durch Wahl von α lösen können und danach die Phasen x und y separat wählen können. Gleichung (2) sieht man wie folgt: Wir setzen $u = y_2 - y_1 - x_1 - x_2$ und rechnen:

$$\begin{aligned}
&|e^{i(x_1+x_2)}\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - e^{i(y_2-y_1)}\sin\alpha_1\sin\alpha_2|^2 + |e^{i(y_1+x_2)}\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + e^{i(y_2-x_1)}\cos\alpha_1\sin\alpha_2|^2\\
=&|\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - e^{iu}\sin\alpha_1\sin\alpha_2|^2 + |\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + e^{iu}\cos\alpha_1\sin\alpha_2|^2\\
=&|\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos u\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + i\sin u\sin\alpha_1\sin\alpha_2|^2 + |\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos u\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + i\sin u\cos\alpha_1\sin\alpha_2|^2\\
=&\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 + \cos^2 u\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 - 2\cos u\cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin^2 u\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2\\
&+\sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 + \cos^2 u\cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 + 2\cos u\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin^2 u\cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_2\\
&= \cos^2\alpha_2 + \cos^2 u\sin^2\alpha_2 + \sin^2 u\sin^2\alpha_2 = 1.
\end{aligned}$$

Also sind die $A(\phi,\theta,\psi)$ geschlossen unter Matrixmultiplikation.

Wir müssen noch zeigen, dass $A(\phi,\theta,\psi)^{-1}$ ebenfalls von der Form $A(\phi',\theta',\psi')$ ist. Durch Rechnung finden wir

$$A(\phi,\theta,\psi)^* A(\phi,\theta,\psi) = \mathbb{I}.$$

Also ist $A(\phi,\theta,\psi)^{-1} = A(\phi,\theta,\psi)^*$, d.h. die As sind Hermitesche Matrizen. Wir haben

$$A(\phi,\theta,\psi)^* = \overline{A(\phi,\theta,\psi)}^T = \begin{pmatrix} e^{i\frac{-\phi-\psi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} & -ie^{i\frac{-\psi+\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \\ -ie^{i\frac{-\phi+\psi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} & e^{i\frac{\phi+\psi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Falls dies gleich $A(\phi',\theta',\psi')$ sein soll, folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{-\phi-\psi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} &= e^{i\frac{\phi'+\psi'}{2}}\cos\frac{\theta'}{2}\\
-ie^{i\frac{-\psi+\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} &= ie^{i\frac{\phi'-\psi'}{2}}\sin\frac{\theta'}{2}\\
-ie^{i\frac{-\phi+\psi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} &= ie^{i\frac{\psi'-\phi'}{2}}\sin\frac{\theta'}{2}\\
e^{i\frac{\phi+\psi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} &= e^{-i\frac{\phi'+\psi'}{2}}\cos\frac{\theta'}{2}
\end{aligned}$$

Wir wählen $\theta' = -\theta$ und erhalten eine Inverse falls

$$e^{i\frac{-\phi-\psi}{2}} = e^{i\frac{\phi'+\psi'}{2}}, \qquad ie^{i\frac{-\psi+\phi}{2}} = ie^{i\frac{\phi'-\psi'}{2}}, \qquad ie^{i\frac{-\phi+\psi}{2}} = ie^{i\frac{\psi'-\phi'}{2}}, \qquad e^{i\frac{\phi+\psi}{2}} = e^{-i\frac{\phi'+\psi'}{2}}.$$

Diese Gleichungen werden durch $\phi' = -\psi$ und $\psi' = -\phi$ gelöst. Also haben wir $A(\phi,\theta,\psi)^{-1} = A(-\psi,-\theta,-\phi)$.