MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
LÖSUNG 3

1. Aufgabe: Symmetriegruppe des regulären Tetraeders

Seien p_1, p_2, p_3, p_4 die Ecken des Tetraeders in beliebiger Reihenfolge. Jede Isometrie lässt die Ecken fix. Also Permutiert jede Isometrie die vier Punkte p_1, p_2, p_3, p_4. Dies definiert eine Abbildung $\phi : G \to S_4$, die $\phi(g)(j) = k$ genau dann erfüllt, wenn $g(p_j) = p_k$. Die Abbildung ϕ ist ein Gruppenhomomorphismus: Falls eine Isometrie g die Ecke p_k auf p_l abbildet, und h die Ecke p_j auf p_k, so folgt, dass $g \circ h$ die Ecke p_j auf p_l abbildet, also $\phi(g \circ h)(j) = l$. Auf der anderen Seite gilt $\phi(g)(\phi(h)(j)) = \phi(g)(k) = l$. Also ist ϕ ein Homomorphismus. Da eine Isometrie, die alle Ecken fest lässt, die Identität ist, folgt, dass ϕ injektiv ist. Transpositionen in S^4 erzeugen S^4 und werden durch Spiegelungen des Tetraeders an Flächen, die eine Kante des Tetraeders beinhalten, realisiert. Also ist ϕ surjektiv.

2. Aufgabe: Duale Darstellung

(1) Es gilt

$$\begin{aligned}
\rho^*(gh)(\phi) &= \phi \circ \rho((gh)^{-1}) \\
&= \phi \circ \rho(h^{-1}g^{-1}) \\
&= \phi \circ \big(\rho(h^{-1}) \circ \rho(g^{-1})\big) \\
&= \big(\phi \circ \rho(h^{-1})\big) \circ \rho(g^{-1}) \\
&= \rho^*(g)(\phi \circ \rho(h^{-1}) \\
&= \rho^*(g)(\rho^*(h)(\phi)) = \big(\rho^*(g) \circ \rho^*(h)\big)(\phi)
\end{aligned}$$

für alle $\phi \in V^*$. Also ist ρ^* ein Homomorphismus.

(2) Wir suchen die Matrix $B(g)$ von $\rho^*(g)$ bezüglich der Dualbasis zur Standardbasis. Seien $a_{ij}(g)$ die Matrixeinträge von $\rho(g)$ bezüglich der Standardbasis und $b_{ij}(g)$ die von $\rho^*(g)$ bezüglich der Dualbasis. D.h.

$$\rho(g)e_j = \sum_{k=1}^{n} e_k a_{kj}(g) \qquad \rho^*(g)(e_j^*) = \sum_{k=1}^{n} e_k^* b_{kj}(g).$$

Es gilt $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, also

$$\begin{aligned}
b_{kj} &= (\rho^*(g)(e_j^*))(e_k) \\
&= (e_j^* \circ \rho(g^{-1}))(e_k) = a_{jk}(g^{-1})
\end{aligned}$$

also $B(g) = A(g^{-1})^T$. Es gilt

$$e_j = \rho(g^{-1})\rho(g)(e_j) = \rho(g^{-1})\rho(g)(e_j) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kj}(g)a_{lk}(g^{-1})e_l,$$

also ist $A(g^{-1}) = A(g)^{-1}$. Wir erhalten $B(g) = (A^{-1})^T$.

3. Aufgabe: Spezielle Unitäre Gruppe

(1) Mit $A, B \in SU(2)$ folgt, dass auch $\det AB = \det A \det B = 1$ und $\overline{AB}^T AB = \overline{B}^T \overline{A}^T AB = \overline{B}^T B = \mathbb{I}$, also $AB \in SU(2)$. Mit $A \in SU(2)$ folgt $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = 1$ und $(A^{-1})^{-1} = A = (\overline{A}^T)^{-1} = \overline{A^{-1}}^T$. Also $A^{-1} \in SU(2)$. Also ist $SU(2)$ ein Untergruppe von $GL(2, \mathbb{C})$.

$SU(2)$ ist jedoch kein Normalteiler von $GL(2,\mathbb{C})$: Es müsste für alle $A \in SU(2)$ und $M \in GL(2,\mathbb{C})$ wieder $MAM^{-1} \in SU(2)$ sein. Die Determinantenbedingung ist erfüllt. Jedoch gilt

$$\left(\overline{MAM^{-1}}\right)^T MAM^{-1} = (\overline{M}^T)^{-1}\overline{A}^T(\overline{M}^T M)AM^{-1}.$$

Um also die Aussage zu widerlegen müssen wir M betrachten, die nicht unitär sind und A, die nicht diagonal sind. Für die Wahlen $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ ergibt dieser Ausdruck z.B. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, was nicht die Einheismatrix ist.

(2) Es gilt

$$\det\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = e^{it}e^{-it} = 1$$

und

$$\overline{A}^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt

$$\det\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

und

$$\overline{A}^T A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe: Homogene Polynome

(1) Es ist klar, dass die $f_j \in U_n$ den Raum U_n aufspannen. Wir zeigen, dass sie linear unabhängig sind: Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $\sum_{j=0}^n a_j f_j = \sum_{j=0}^n a_j z_1^j z_2^{n-j} = 0$. Werte dieses Polynom für $z_2 = 1$ aus. Wir erhalten $\sum_{j=0}^n a_j z^j = 0$, also $a_j = 0$ für alle j.

(2) Wir rechnen:

$$\rho_n\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}(f_j) = f_j(e^{-it}z_1, e^{it}z_2) = (e^{-it}z_1)^j(e^{it}z_2)^{n-j} = e^{it(n-2j)}f_j.$$

Ferner:

$$\begin{aligned}\rho_n\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}(f_j) &= f_j\left(\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= (\cos t z_1 - \sin t z_2)^j(\cos t z_1 + \cos t z_2)^{n-j} \\ &= \sum_{a=0}^{j}\sum_{b=0}^{n-j}\binom{j}{a}\binom{n-j}{b}(-1)^{j-a}(\cos t)^{a+n-j-b}(\sin t)^{j-a+b}z_1^{a+b}z_2^{n-a-b} \\ &= \sum_{l=0}^{n} r_l(t)f_l\end{aligned}$$

mit

$$r_l(t) = \sum_{a,b}\binom{j}{a}\binom{n-j}{b}(-1)^{j-a}(\cos t)^{a+n-j-b}(\sin t)^{j-a+b}$$

wobei die Summe über alle a, b mit $0 \le a \le j$, $0 \le b \le n-j$ und $a+b = l$ geht.

(3) Sei $p(z_1, z_2) = \sum_{j=0}^n a_j f_j$ Element des invarianten Unterraums V. Wenden wir $\rho_n(\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix})$ auf p an, so erhalten wir

$$\sum_{j=0}^{n} a_j e^{it(n-2j)} f_j \in V$$

für alle t, da V invariant ist. Also auch

$$\sum_{j=0}^{n} a_j e^{-2itj} f_j \in V$$

da V ein Vektorraum ist. Wenn wir dies m mal nach t differenzieren und $t = 0$ setzen erhalten wir

$$\sum_{j=0}^{n} v_{jm} a_j f_j \in V$$

mit $v_{jm} = (j)^m$, da alle Differenzenquotienten in V liegen, und V abgeschlossen ist. Wir wollen aus diesen Elementen von V die Elemente $a_l f_l$ als Linearkombination konstruieren. Dazu suchen wir $\alpha_{ml} \in \mathbb{C}$ mit

$$a_l f_l = \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ml} v_{jm} a_j f_j \in V$$

Die α_{ml} sind die Komponenten der inversen Matrix von $(v_{jm})_{j,m=0,\dots,n}$, falls diese existiert. Diese Matrix ist invertierbar, da sie eine Vandermonde–Matrix ist. Wir erhalten $a_l f_l \in V$. Für alle l mit $a_l \neq 0$ folgt also $f_l \in V$.

(4) Wir nehmen an, dass es einen invarianten Unterraum $V \subset U_n$ gibt, der $V \neq \{0\}$ erfüllt. Wir müssen $V = U_n$ zeigen. Dazu zeigen wir, dass alle Basisvektoren f_j in V liegen. Wir wählen irgend ein $v \in V$, dass nicht gleich 0 ist. Wir schreiben $v = \sum_{j=0}^{n} a_j f_j$ und wissen, dass es ein j gibt mit $a_j \neq 0$. Also $f_j \in V$ nach Aufgabenteil (3). Ferner wissen wir, dass $\rho_n \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} f_j$ in V liegt, da V invariant ist. Nach (2) gilt also

$$\sum_{l=0}^{n} r_l(t) f_l \in V$$

mit

$$r_l(t) = \sum_{a,b} \binom{j}{a} \binom{n-j}{b} (-1)^{j-a} (\cos t)^{a+n-j-b} (\sin t)^{j-a+b}$$

wobei die Summe über alle a, b mit $0 \leq a \leq j$, $0 \leq b \leq n-j$ und $a+b = l$ geht. Sei $l \in \{0, \dots, n\}$ beliebig. Nach (3) genügt es, um $f_l \in V$ zu zeigen, dass es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt mit $r_l(t) \neq 0$. Wir nehmen an $r_l(t)$ sei die Nullfunktion. Also ist

$$0 = \sum_{a,b} \binom{j}{a} \binom{n-j}{b} (-1)^{j-a} (\tan t)^{j-a+b} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Es folgt

$$0 = \sum_{a,b} \binom{j}{a} \binom{n-j}{b} (-1)^{j-a} x^{j-a+b} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Alle Exponenten $j - a + b$ in der Summe sind paarweise verschieden. Dies ist ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Monome x^w, $w \in \mathbb{N}$. Also ist $r_l(t)$ nicht die Nullfunktion, und $f_l \in V$ mit (3). Also ist $V = U_n$ und U_n damit irreduzibel.

Abgabe am 15./16. März in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 27.