MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
MUSTERLÖSUNG 4

1. Aufgabe: Konjugationsklassen in S_n

(1) Es gilt

$$\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 7\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 4 & 1 & 7 & 5 & 6 & 2\end{pmatrix}.$$

(2) Sei $A = \{k_1, \dots, k_r\}$ und $B = \{l_1, \dots, l_s\}$. Setze $C = \{1, \dots, n\} \setminus (A \cup B)$. Für $j \in A$ haben wir $j \notin B$ und auch $\sigma(j) \notin B$. Ferner ist τ auf dem Komplement von B die Identität. Also $\sigma\tau(j) = \sigma(j) = \tau\sigma(j)$ für $j \in A$. Für $j \in B$ argumentiere genau gleich. Für $j \in C$ gilt $\sigma(j), \tau(j) \in C$. Da σ und τ auf C die Identität sind, folgt $\sigma\tau(j) = j = \tau\sigma(j)$ für $j \in C$.

(3) Wir beobachten zunächst, dass für $\lambda = \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \dots\end{pmatrix}$ die Darstellung $\lambda = \begin{pmatrix}a_1 & \lambda(a_1) & \lambda^2(a_1) & \dots\end{pmatrix}$ folgt. Dies motiviert den folgenden Beweis für die Existenz der Zykeldarstellung: Wir verwenden Induktion nach n. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Gelte also die Aussage für alle $n' = 1, \dots, n-1$ und sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Wir definieren $T_0 = \{j, \sigma(j), \sigma^2(j), \dots\} \subset \{1, \dots, n\}$. Da dies eine endliche Menge ist, gibt es $l > k \geq 0$, sodass $\sigma^k(j) = \sigma^l(j)$. Also folgt $j = \sigma^{l-k}(j)$ mit $l - k \geq 1$. Sei $m \geq 1$ die kleinste Zahl mit $j = \sigma^m(j)$. Es folgt

$$T_0 = \{j, \sigma(j), \dots, \sigma^{m-1}(j)\}.$$

Definiere das Komplement

$$T' = \{1, \dots, n\} \setminus T_0.$$

Es gilt $\sigma(T_0) \subset T_0$ aber auch $\sigma(T') \subset T'$, da $\sigma(i) \in T_0$ durch Anwendung von σ^{-1} die Aussage $i \in T_0$ impliziert. Also sind beide Teilmengen T_0 und T' invariant unter σ. Wir definieren den Zykel

$$\tau_0 = \begin{pmatrix}j & \sigma(j) & \cdots & \sigma^{m-1}(j)\end{pmatrix}.$$

Die Mengen T_0 und T' sind ebenfalls unter τ_0 invariant (gleiches Argument wie für σ). Wir setzen

$$\tau' = \tau_0^{-1}\sigma.$$

Diese Permutation lässt also T' invariant und ist auf T_0 die Identität. Da $|T'| < n$ gibt es nach Induktionsvoraussetzung Zykel $\tau_1, \dots, \tau_a$ mit paarweise Disjunkten zugehörigen Mengen $T_1, \dots, T_a$ mit $\tau' = \tau_1 \cdots \tau_a$. Es folgt

$$\sigma = \tau_0\tau' = \tau_0\tau_1 \cdots \tau_a.$$

Dies ist die gesuchte Zerlegung: Da $T_1 \cup \dots \cup T_a = T'$ sind alle Menge $T_0, T_1, \dots, T_a$ paarweise disjunkt.

Nun zur Eindeutigkeit: Wir nehmen wieder an, dass die Aussage für $n' = 1, \dots, n-1$ gilt und betrachten $\sigma \in S_n$. Seien

$$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_a = \tau'_1 \cdots \tau'_{a'} \tag{1}$$

zwei Zerlegungen in Zykeln mit zugehörigen Mengen $T_1, \dots, T_a$ und $T'_a, \dots, T'_{a'}$. Sei m in T_1. Durch wiederholtes Anwenden von σ folgt wie im obigen Existenzbeweis

$$\tau_1 = \begin{pmatrix}m & \sigma(m) & \cdots & \sigma^{d-1}(m)\end{pmatrix},$$

wobei $d \geq 1$. Da $T'_1 \cup \dots \cup T'_{a'} = \{1, \dots, n\}$ ist m in einem $T'_{j'}$. Es folgt

$$\tau'_{j'} = \begin{pmatrix}m & \sigma(m) & \cdots & \sigma^{d-1}(m)\end{pmatrix} = \tau_1.$$

Durch Anwenden von τ_1^{-1} folgt

$$\tau_2 \cdots \tau_a = \tau'_1 \cdots \tau'_{j'-1}\tau'_{j'+1} \cdots \tau'_{a'} \tag{2}$$

Dies ist eine Permutation der Menge $\{1,\dots,n\}\backslash T_1$. Diese Menge hat die Mächtigkeit $n-|T_1| < n$. Aus der Induktionsannahme folgt die Eindeutigkeit der Zerlegung (2) bis auf Umnummerierung der Zykeln, also auch die Eindeutigkeit der Zerlegung (1) bis auf Umnummerierung.

Hinweis: Einen kürzeren, aber abstrakteren Beweis erhält man, indem man die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\{1,\dots,n\}$ betrachtet, bei der $i \sim j$ genau dann gilt, wenn es ein $k \geq 0$ gibt mit $j = \sigma^k(i)$. Die Äquivalenzklassen ergeben die zu den Zykeln gehörigen Teilmengen.

(4) Sei $\sigma \in S_n$ beliebig und $\tau = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_r \end{pmatrix} \in S_n$ ein Zykel mit Menge $T = \{a_1,\dots,a_r\}$. Durch Fallunterscheidung $\sigma(j) \in T$ oder $\sigma(j) \notin T$ sieht man

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a_1) & \cdots & \sigma(a_r) \end{pmatrix}.$$

Dies ist wieder ein Zykel und er hat dieselbe Länge wie τ. Falls

$$\tau = \tau_1 \cdots \tau_a$$

ein Produkt von Zykeln der Länge $l_1,\dots,l_a$ ist, so ist also auch

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma\tau_1\sigma^{-1} \cdots \sigma\tau_a\sigma^{-1}$$

ein Produkt von Zykeln der Länge $l_1,\dots,l_a$. Wir haben also eine Richtung der Aussage gezeigt.

Für die andere Richtung betrachte zwei Permutationen σ, τ, deren Zerlegungen

$$\tau = \tau_1 \cdots \tau_a \qquad \sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_a$$

in Zykeln wie in (3) dieselben Zykellängen $l_1,\dots,l_a$ besitzen. Wir schreiben

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} \sigma_{j1} & \cdots & \sigma_{jl_j} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \tau_j = \begin{pmatrix} \tau_{j1} & \cdots & \tau_{jl_j} \end{pmatrix}.$$

Die Zahlen $\sigma_{jl}, j = 1,\dots,a, \quad l = 1,\dots,l_a$ sind paarweise verschieden und $\cup_{j,l}\{\sigma_{jl}\} = \{1,\dots,n\}$. Dasselbe gilt für die τ_{jl}. Also definiert $\lambda(\sigma_{jl}) = \tau_{jl}$ eine Permutation $\lambda \in S_n$ mit $\lambda\sigma\lambda^{-1} = \tau$.

Hinweis: Man lässt gewöhnlich in der Zykelschreibweise diejenigen Zykel weg, die zur Identität gehören, wie z.B. (3). Man schreibt also

$$(12) \qquad \text{statt} \qquad (12)(3)(4)$$

für das Element von S_4, dass die Zahlen 1 und 2 vertauscht.

2. Aufgabe: Charaktertafel von D_6

(1) Seien die ersten drei Ecken im Gegenuhrzeigersinn mit $1, 2, 3$ bezeichnet, sodass $\phi(R) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\phi(S) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$. Da ϕ ein Homomorphismus ist, folgt durch Rechnen:

$$\begin{aligned}
\phi(1) &= \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \\
\phi(R) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
\phi(R^2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
\phi(R^3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \\
\phi(R^4) &= \phi(R) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
\phi(R^5) &= \phi(R^2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
\phi(S) &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \\
\phi(RS) &= \phi(R)\phi(S) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \\
\phi(R^2S) &= \phi(R^2)\phi(S) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \\
\phi(R^3S) &= \phi(S) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \\
\phi(R^4S) &= \phi(R^4)\phi(S) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \\
\phi(R^5S) &= \phi(R^5)\phi(S) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass ϕ surjektiv ist, und lesen

$$\ker\phi = \{1, R^3\}$$

ab.

(2) Die Konjugationsklassen von S_3 sind $[(1)] = \{(1)\}$, $[(12)] = \{(12),(13),(23)\}$ und $[(123)] = \{(123),(132)\}$. Da Charaktere auf Konjugationsklassen konstant sind, können wir die Elemente von G zur Berechnung gruppieren. Aus der Vorlesung sind die Charaktere χ_{ρ_p} bekannt. Es gilt für $j = 0,\dots,5$

$$\chi_{\rho_p\circ\phi}(R^jS) = \mathrm{tr}(\rho_p((12))) = 0$$

Für $j = 1,2,4,5$ gilt

$$\chi_{\rho_p\circ\phi}(R^j) = \mathrm{tr}(\rho_p((123))) = -1$$

Schliesslich ist $\chi_{\rho_p\circ\phi}(1) = 2$ die Dimension der Standarddarstellung von S_3. Da ρ_p irreduzibel ist und ϕ surjektiv, ist auch $\rho_p\circ\phi$ irreduzibel.

(3) Seien A, B die beiden Rechtecke, sodass

$$SA = A \qquad SB = B \qquad RA = B \qquad RB = A$$

Wir definieren die Abbildung $\psi : G \to S_2$ durch

$$\psi(R^l) = \psi(R^lS) = \begin{cases} (1), & l \text{ gerade} \\ (12), & l \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dass diese Abbildung ein Gruppenhomomorphismus ist sieht man entweder geometrisch, indem man feststellt, dass $\phi(g) = (12)$ genau dann, wenn g die beiden Rechtecke A und B vertauscht. Alternativ kann man auch die Gleichung

$$\psi(g)\psi(h) = \psi(gh)$$

durch Rechnen zeigen, indem man z.B. eine Fallunterscheidung macht: Man setzt $M = \{1,\dots,R^5\} \subset D_6$ und unterscheidet die vier Fälle $(g,h) \in M \times M$, $(g,h) \in M \times M^c$, $(g,h) \in M^c \times M$ und $(g,h) \in M^c \times M^c$.

Nun konstruieren wir eine eindimensionale Darstellung von G. Die Gruppe S_2 hat zwei eindimensionale Darstellungen: Die triviale Darstellung und die Signumsdarstellung ρ_s. Wir betrachten die Darstellung $\rho_s\circ\psi$. Es gilt

$$\chi_{\rho_s\circ\psi}(R^l) = \chi_{\rho_s\circ\psi}(R^lS) = \begin{cases} \chi_{\rho_s}((1)) = 1, & l \text{ gerade} \\ \chi_{\rho_s}((12)) = -1, & l \text{ ungerade} \end{cases}$$

Da $\rho_s\circ\psi$ eine eindimensionale Darstellung ist, ist sie irreduzibel.

(4) Bisher haben wir:

	$[1]$	$[R]$	$[R^2]$	$[R^3]$	$[S]$	$[RS]$
χ_{trivial}	1	1	1	1	1	1
χ_{Standard}	2	1	-1	-2	0	0
$\chi_{\det}$	1	1	1	1	-1	-1
$\chi_{\rho_p\circ\phi}$	2	-1	-1	2	0	0
$\chi_{\rho_s\circ\psi}$	1	-1	1	-1	1	-1
$\chi_{???}$	?	?	?	?	?	?

Da D_6 sechs Konjugationsklassen gibt, suchen wir noch eine letzte irreduzible Darstellung bzw. ihren Charakter. Wenn wir die eindimensionalen Darstellungen $\det : D_6 \to GL(1,\mathbb{C})$ und $\rho_s\circ\psi : D_6 \to GL(1,\mathbb{C})$ miteinander multiplizieren, erhalten wir eine weitere eindimensionale Dartsellung mit Charakter

$$\begin{aligned} \chi_{\det\otimes(\rho_s\circ\psi)} = \det\cdot(\rho_s\circ\psi) &: D_6 \to \mathbb{C} \\ &g \mapsto \det g \cdot \rho_s(\psi(g)) \end{aligned}$$

Wir rechnen

$$\chi_{\det\otimes(\rho_s\circ\psi)}(g) = \begin{cases} 1, & \text{falls } g = 1 \\ -1, & \text{falls } g = R \\ 1, & \text{falls } g = R^2 \\ -1, & \text{falls } g = R^3 \\ -1, & \text{falls } g = S \\ 1, & \text{falls } g = RS \end{cases}$$

Also ist diese Darstellung verschieden von den bisher gefundenen Darstellungen. Sie ist irreduzibel, da sie eindimensional ist. Wir erhalten

	$[1]$	$[R]$	$[R^2]$	$[R^3]$	$[S]$	$[RS]$
χ_{trivial}	1	1	1	1	1	1
χ_{Standard}	2	1	-1	-2	0	0
$\chi_{\det}$	1	1	1	1	-1	-1
$\chi_{\rho_p \circ \phi}$	2	-1	-1	2	0	0
$\chi_{\rho_s \circ \psi}$	1	-1	1	-1	1	-1
$\chi_{\det \otimes (\rho_s \circ \psi)}$	1	-1	1	-1	-1	1