MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
MUSTERLÖSUNG ZU SERIE 5

1. Aufgabe: Charaktertafeln

(1) $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$. Da G kommutativ ist, haben alle Konjugationsklassen nur ein Element. Also suchen wir vier irreduzible Darstellungen. Die triviale Darstellung ist geschenkt. Aus der Kommutativität von G folgt auch, dass alle irreduziblen Darstellungen eindimensional sind. Eindimensionale Darstellungen sind automatisch irreduzibel. Also suchen wir eindimensionale Darstellungen $\rho : G \to GL(1, \mathbb{C}) = C^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sei ρ eine solche Darstellung. Aus der Homomorphismuseigenschaft von ρ folgt $\rho(\overline{n}) = \rho(\overline{1})^n, n = 0, 1, 2, 3$. (Hier muss man aufpassen, dass die Gruppenverknüpfung in $G = \mathbb{Z}/4Z$ normalerweise additiv geschrieben wird. Insbesonder ist das neutrale Element von G das Element $\overline{0}$. Das neutrale Element von $\mathbb{C}^*$ hingegen ist $1 \in \mathbb{C}^*$.) Also ist ρ durch die komplexe Zahl $\rho(\overline{1}) \neq 0$ schon vollständig festgelegt. Es muss gelten

(1) $$1 = \rho(\overline{0}) = \rho(\overline{4}) = \rho(\overline{1})^4.$$

Also folgt $\rho(\overline{1}) \in \{1, i, -1, -i\}$. Jede dieser vier Wahlen definiert eine eindimensionale Darstellung von G. Die Wahl $\rho(\overline{1}) = 1$ entspricht der trivialen Darstellung. Da für eindimensionale Darstellungen ρ, der Charakter schon durch $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g)) = \rho(g)$ gegeben ist, erhalten wir die Charaktertafel:

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$[\overline{0}]$	$[\overline{1}]$	$[\overline{2}]$	$[\overline{3}]$
χ_1	1	1	1	1
χ_i	1	i	-1	$-i$
χ_{-1}	1	-1	1	-1
χ_{-i}	1	$-i$	-1	i

(2) $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1})\}$. Als direktes Produkt abelscher Gruppen ist G wieder abelsch. Also suchen wir wie vorher vier eindimensionale Darstellungen. Sei $\rho : G \mapsto \mathbb{C}^*$ eine solche. Für jedes Element $g = (\overline{n}, \overline{m})$ von G gilt jedoch schon $g + g = (\overline{0}, \overline{0})$. Also folgt $\rho(g) \in \{1, -1\}$ für alle $g \in G$.

Es gilt $\rho(\overline{0}, \overline{0}) = 1$ und $\rho(\overline{1}, \overline{1}) = \rho(\overline{0}, \overline{1})\rho(\overline{1}, \overline{0})$. Die Darstellung ρ ist nun durch die zwei Wahlen von $\rho(\overline{0}, \overline{1}) \in \{1, -1\}$ und $\rho(\overline{1}, \overline{0}) \in \{1, -1\}$ festgelegt. Davon gibt es die vier $(1, 1), (1, -1), (-1, 1)$ und $(-1, -1)$. Damit haben wir alle eindimensionalen Darstellungen gefunden. Also folgt

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$[(\overline{0}, \overline{0})]$	$[(\overline{0}, \overline{1})]$	$[(\overline{1}, \overline{0})]$	$[(\overline{1}, \overline{1})]$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1
$\chi_{1,-1}$	1	1	-1	-1
$\chi_{-1,1}$	1	-1	1	-1
$\chi_{-1,-1}$	1	-1	-1	1

2. Aufgabe: Darstellungen der Permutationsgruppe

(1) Es gilt $k = \sigma^{-1}(i)$ genau dann, wenn $\sigma(k) = i$. Also folgt

$$\Big(\rho(\sigma)(E_{kl})\Big)_{ij} = \delta_{k\sigma^{-1}(i)}\delta_{l\sigma^{-1}(j)} = \delta_{\sigma(k)i}\delta_{\sigma(l)j} = \big(E_{\sigma(k)\sigma(l)}\big)_{ij}.$$

(2) Sei A der Raum der symmetrischen $X \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ mit verschwindender Diagonale. Sei $X = (x_{ij}) \in A$. Es folgt

$$X = x_{12}(E_{12} + E_{21}) + x_{13}(E_{13} + E_{31}) + x_{23}(E_{23} + E_{32})$$

Ferner sind die Vektoren $E_{12} + E_{21}$, $E_{13} + E_{31}$ und $E_{23} + E_{32}$ linear unabhängig und in A. Sie bilden also eine Basis $\mathcal{B}$ von A. Für $\sigma \in S_3$ folgt

$$\rho(\sigma)(E_{ij} + E_{ji}) = E_{\sigma(i)\sigma(j)} + E_{\sigma(j)\sigma(i)}$$

Ferner ist $\rho(\sigma)$ invertierbar. Also bildet $\rho(\sigma)$ die Menge $\mathcal{B}$ bijektiv nach $\mathcal{B}$ ab. Es folgt, dass A ein invarianter Unterraum ist. Da $\rho(\sigma)$ die Basisvektoren in $\mathcal{B}$ permutiert, permutiert es die Koeffizienten einer Matrix $X \in A$ bezüglich dieser Basis. Der Unterraum $U \subset A$ ist dadurch definiert, dass die Summe der Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ verschwindet. Die Summe ist invariant unter Permutation der Summanden. Also ist auch U ein invarianter Unterraum.

Wir zeigen, dass U irreduzibel ist, indem wir zeigen, dass U zur bekannten irreduziblen Standarddarstellung ρ_2 von S_3 auf $W = \{z \in \mathbb{C}^3 : z_1 + z_2 + z_3\}$ isomorph ist.

Wir wissen schon, dass $\rho(\sigma)$ die Elemente von $\mathcal{B}$ permutiert. Wir möchten die Basisvektoren von A so ordnen, dass die Permutation wieder durch σ gegeben ist. Es gilt für Transpositionen $\sigma = (ij) \in S_3$, dass

$$\rho(\sigma)(E_{ij} + E_{ji}) = E_{\sigma(i)\sigma(j)} + E_{\sigma(j)\sigma(i)} = E_{ij} + E_{ji}.$$

Wenn wir also $e_1 = E_{23} + E_{32}$, $e_2 = E_{13} + E_{31}$ und $e_3 = E_{12} + E_{21}$ definieren, so gilt für alle $\sigma \in S_3$:

$$\rho(\sigma)(e_j) = e_{\sigma(j)}. \tag{2}$$

Die Abbildung

$$\mathbb{C}^3 \to A \qquad (z_1, z_2, z_3) \mapsto z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$$

ist ein Vektorraumisomorphismus, da die e_1, e_2, e_3 eine Basis von A bilden. Wir definieren nun die bijektive Abbildung

$$f : W \to U \qquad f(z_1, z_2, z_3) = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$$

Es gilt für $\sigma \in S_3$ und $(z_1, z_2, z_3) \in W$,

$$\begin{aligned}\rho(\sigma)(f(z_1, z_2, z_3)) &= z_1\rho(\sigma)(e_1) + z_2\rho(\sigma)(e_2) + z_3\rho(\sigma)(e_3)\\ &= z_1e_{\sigma(1)} + z_2e_{\sigma(2)} + z_3e_{\sigma(3)} = f(z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, z_{\sigma^{-1}(3)}) = f(\rho_2(\sigma)(z_1, z_2, z_3)).\end{aligned}$$

Also ist f ein Isomorphismus zwischen den Darstellungen ρ_2 und $\rho|_U$. Insbesondere ist $\rho|_U$ irreduzibel.

Hinweis : Man kann auch die Aufgabe lösen, indem man die Charaktere von ρ_2 und von $\rho|_U$ berechnet und feststellt, dass sie gleich sind. Dann müssen beiden Darstellungen isomorph sein. Wir wollen dies hier ebenfalls tun: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der Charakter von ρ_2 durch

$$\begin{aligned}\chi_{\rho_2}(1) &= 2\\ \chi_{\rho_2}(12) &= 0\\ \chi_{\rho_2}(123) &= -1\end{aligned}$$

gegeben ist. Es gilt

$$\chi_{\rho|_U}(1) = \dim U = 2$$

Die Matrizen von $\rho(\sigma)|_U$ bezüglich der Basis $e_1 - e_2, e_2 - e_3$ von U lassen sich mit Gleichung (2) aufstellen. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}\rho(12)(e_1 - e_2) &= -(e_1 - e_2)\\ \rho(12)(e_2 - e_3) &= e_1 - e_3 = (e_1 - e_2) + (e_2 - e_3)\end{aligned}$$

also

$$\chi_{\rho|_U}(12) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ferner

$$\begin{aligned}\rho(123)(e_1 - e_2) &= (e_2 - e_3)\\ \rho(123)(e_2 - e_3) &= e_3 - e_1 = -(e_1 - e_2) - (e_2 - e_3)\end{aligned}$$

also

$$\chi_{\rho|_U}(123) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

Also sind die Charaktere beider Darstellungen gleich. Sie sind deshalb isomorph. Es folgt, dass U irreduzibel ist.

(3) Da ρ und sgn Homomorphismen sind und S_3 von den Transpositionen $(12), (13), (23)$ erzeugt wird, genügt es die Gleichung für Transpositionen zu verifizieren. Es gilt

$$\rho(\tau)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle Transpositionen τ, wie man leicht nachrechnet.

(4) Wir gehen wie in Teilaufgabe (2) vor, müssen allerdings auf Vorzeichen achten. Wir setzen

$$f_1 = E_{23} - E_{32} \qquad f_2 = E_{31} - E_{13} \qquad f_3 = E_{12} - E_{21}$$

Wie oben zeigt man: Die Vektoren f_1, f_2, f_3 bilden eine Basis $\mathcal{F}$ des Raumes B der antisymmetrischen (3×3)–Matrizen. Für $\sigma \in S_3$ gilt nun

$$\rho(\sigma) f_i = \operatorname{sgn}(\sigma) f_{\sigma(i)}.$$

Man beweist dies durch explizite Rechnung. Also bildet $\rho(\sigma)$ den Raum B in sich selbst ab. Der Unterraum V ist dadurch Charakterisiert, dass die Summe der Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{F}$ verschwindet. Falls $X \in V$ und $\sigma \in S_3$, so gilt für die Koordinaten von $Y = \rho(\sigma)(X)$

$$y_{12} + y_{13} + y_{23} = \operatorname{sgn}(\sigma)(x_{12} + x_{13} + x_{23}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, 0 = 0$$

Also ist auch V ein invarianter Unterraum. Die bijektive Abbildung

$$g : W \to V \qquad g(z_1, z_2, z_3) = z_1 f_1 + z_2 f_2 + z_3 f_3$$

erfüllt

$$\begin{aligned} \rho(\sigma)(g(z_1, z_2, z_3)) &= z_1 \rho(\sigma)(f_1) + z_2 \rho(\sigma)(f_2) + z_3 \rho(\sigma)(f_3) \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma)\Big(z_1 f_{\sigma(1)} + z_2 f_{\sigma(2)} + z_3 f_{\sigma(3)}\Big) \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma) g(z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, z_{\sigma^{-1}(3)}) \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma) g(\rho_2(\sigma)(z_1, z_2, z_3)) = g(\operatorname{sgn}(\sigma)\rho_2(\sigma)(z_1, z_2, z_3)) \end{aligned}$$

Also ist $\rho|_V$ isomorph zur irreduziblen Darstellung $\operatorname{sgn} \cdot \rho_2$, insbesondere also selbst irreduzibel.

Hinweis: Auch hier hätten wir wieder die Charaktere beider Darstellungen berechnen und vergleichen können.

3. Aufgabe: Faltung von Funktionen

(1) Es gilt für alle $g \in G$:

$$\begin{aligned} \Big((\phi_1 * \phi_2) * \phi_3\Big)(g) &= \sum_{h \in G} (\phi_1 * \phi_2)(gh^{-1})\phi_3(h) \\ &= \sum_{h \in G} \left(\sum_{k \in G} \phi_1((gh^{-1})k^{-1})\phi_2(k) \right) \phi_3(h) \\ &= \sum_{h \in G} \left(\sum_{k \in G} \phi_1(g(kh)^{-1})\phi_2((kh)h^{-1}) \right) \phi_3(h) \end{aligned}$$

Wenn wir k über die ganze Gruppe G laufen lassen, so läuft auch kh über die ganze Gruppe G, da $k \mapsto kh$ eine bijektive Abbildung $G \to G$ definiert. Wir erhalten

$$\Big((\phi_1 * \phi_2) * \phi_3\Big)(g) = \sum_{h\in G}\left(\sum_{k\in G}\phi_1(gk^{-1})\phi_2(kh^{-1})\right)\phi_3(h)$$

Da wir endliche Summen haben, folgt

$$\Big((\phi_1 * \phi_2) * \phi_3\Big)(g) = \sum_{k\in G}\phi_1(gk^{-1})\Bigg(\sum_{h\in G}\phi_2(kh^{-1})\phi_3(h)\Bigg) = \Big(\phi_1 * (\phi_2 * \phi_3)\Big)(g)$$

(2) Seien ψ, ϕ Klassenfunktionen und $g, h \in G$. Es gilt

$$\begin{aligned}\phi * \psi(ghg^{-1}) &= \sum_{k\in G}\phi(ghg^{-1}k^{-1})\psi(k)\\ &= \sum_{k\in G}\phi(hg^{-1}k^{-1}g)\psi(k)\\ &= \sum_{k\in G}\phi(h(g^{-1}kg)^{-1})\psi(g^{-1}kg)\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass ϕ und ψ Klassenfunktionen sind. Da $k \mapsto g^{-1}kg$ eine Bijektion ist, folgt $\phi * \psi(ghg^{-1}) = \phi * \psi(h)$. Also ist $\phi * \psi$ eine Klassenfunktion. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\phi * \psi(g) &= \sum_{h\in G}\phi(gh^{-1})\psi(h)\\ &= \sum_{h\in G}\psi(h)\phi(h^{-1}g)\\ &= \sum_{h\in G}\psi(g(h^{-1}g)^{-1})\phi(h^{-1}g) = \psi * \phi(g),\end{aligned}$$

da $h \mapsto h^{-1}g$ eine Bijektion $G \to G$ definiert.