MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
MUSTERLÖSUNG ZU SERIE 6

1. Aufgabe: Burnside–Matrizen

(1) Eine Gruppe zerfällt disjunkt in Konjugationsklassen, da konjugiert sein eine Äquivalenzrelation definiert. Sei $j \in \{1, \dots, k\}$. Sei $g \in C_j$. Dann ist g^{-1} also Element von genau einer Konjugationsklasse $C_{j'}$. Falls $g' \in C_j$ ein anderes Element von C_j ist, so gibt es $h \in G$ mit $g' = hgh^{-1}$. Es folgt $(g')^{-1} = hg^{-1}h^{-1}$. Also ist auch $(g')^{-1} \in C_{j'}$, und j' damit wohldefiniert.

(2) (a) Die Menge $\{(g, h) \in C_r \times C_s : gh \in C_t\}$ zerfällt in die paarweise disjunkten Teilmengen

$$A_{rs}(u) := \{(g, h) \in C_r \times C_s : gh = u\}, \qquad u \in C_t.$$

Wir behaupten, dass alle $A_{rs}(u)$ gleich viele Elemente enthalten. Seien dazu $u, u' \in C_t$. Also gibt es ein $w \in G$ mit $u' = wuw^{-1}$. Die Abbildungsvorschrift

$$(g, h) \mapsto (wgw^{-1}, whw^{-1})$$

definiert eine Abbildung $A_{rs}(u) \to A_{rs}(u')$: Aus $(g, h) \in C_r \times C_s$ folgt $(wgw^{-1}, whw^{-1}) \in C_r \times C_s$ und aus $gh = u$ folgt $wgw^{-1}whw^{-1} = wuw^{-1} = u'$. Ferner ist diese Abbildung bijektiv: Die Inverse ist durch

$$(g, h) \mapsto (w^{-1}gw, w^{-1}hw)$$

gegeben. Insbesondere haben also die Mengen $A_{rs}(u)$ und $A_{rs}(u')$ gleich viele Elemente. Also gilt

$$|\{(g, h) \in C_r \times C_s : gh \in C_t\}| = \sum_{u \in C_t} |A_{rs}(u)| = |C_t| \, |A_{rs}(u_0)|$$

wobei $u_0 \in C_t$ ein beliebiges Element ist.

(b) Sei $u \in C_t$ beliebig. Dann ist

$$a_{r's't} = |A_{r's'}(u)| = |\{(g, h) \in C_{r'} \times C_{s'} : gh = u\}|.$$

Ferner ist $u^{-1} \in C_{t'}$ nach Definition von t'. Es gilt also

$$a_{rst'} = |A_{rs}(u^{-1})| = |\{(g, h) \in C_r \times C_s : gh = u^{-1}\}|.$$

Aus $g \in C_{r'}$ folgt $g^{-1} \in C_r$. Ferner folgt aus $h \in C_{s'}$ die Aussage $h^{-1} \in C_s$, also auch $g^{-1}h^{-1}g \in C_s$. Schliesslich folgt aus $gh = u$ die Aussage $g^{-1}(gh^{-1}g^{-1}) = h^{-1}g^{-1} = (gh)^{-1} = u^{-1}$. Also definiert

$$(g, h) \mapsto (g^{-1}, gh^{-1}g^{-1})$$

eine Abbildung

$$\{(g, h) \in C_{r'} \times C_{s'} : gh = u\} \to \{(g, h) \in C_r \times C_s : gh = u^{-1}\}$$

Sie ist bijektiv, da

$$(g, h) \mapsto (g^{-1}, g^{-1}h^{-1}g)$$

eine Inverse definiert. Es folgt $a_{r's't} = a_{rst'}$.

(c) Sei $g \in G$. Dann gibt es ein t_0 mit $g \in C_{t_0}$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\delta_{C_r} * \delta_{C_s}(g) &= \sum_{h \in G} \delta_{C_r}(gh^{-1})\delta_{C_s}(h) \\
&= \sum_{h \in C_s} \delta_{C_r}(gh^{-1}) \\
&= |\{h \in C_s : gh^{-1} \in C_r\}| \\
&= \sum_{g' \in C_r} |\{h \in C_s : gh^{-1} = g'\}| \\
&= \sum_{g' \in C_r} |\{h' \in C_s : g'h' = g\}| \\
&= |\{(g', h') \in C_r \times C_s : g'h' = g\}| \\
&= a_{rst_0} = \sum_{t=1}^{k} a_{rst}\delta_{C_t}(g)
\end{aligned}$$

2. Aufgabe: Charaktertafel von S_4

(1) Wir wissen bereits, dass zwei Elemente von S_4 (allgemeiner: von S_n) genau dann konjugiert sind, wenn die Anzahl der Zykeln der Länge l für alle l übereinstimmt. Man muss nur noch darauf achten, wann zwei Zykel identisch sind (wie z.B. $(123) = (231)$). Es folgt

$$\begin{aligned}
[(1)] &= \{(1)\} \\
[(12)] &= \{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\} \\
[(12)(34)] &= \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \\
[(123)] &= \{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\} \\
[(1234)] &= \{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}.
\end{aligned}$$

(2) Der Charakter der trivialen Darstellung ist

$$\chi_{\text{trivial}}(\sigma) = \text{Tr}(1) = 1.$$

Der Charakter der Signumsdarstellung ist

$$\chi_{\text{sgn}}(\sigma) = \text{Tr}(\text{sgn}(\sigma)) = \text{sgn}(\sigma).$$

Da der Charakter eine Klassenfunktion ist, genügt es ihn auf den Representanten $(1), (12), (12)(34), (123)$ und (1234) zu berechnen. Also

$$\begin{aligned}
\chi_{\text{sgn}}(1) &= 1 \\
\chi_{\text{sgn}}(12) &= -1 \\
\chi_{\text{sgn}}((12)(34)) &= \text{sgn}(12)\,\text{sgn}(34) = 1 \\
\chi_{\text{sgn}}(123) &= \text{sgn}((12)(23)) = \text{sgn}(12)\,\text{sgn}(23) = 1 \\
\chi_{\text{sgn}}(1234) &= \text{sgn}((12)(23)(34)) = \text{sgn}(12)\,\text{sgn}(23)\,\text{sgn}(34) = -1,
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass das Signum ein Homomorphismus ist und auf Transpositionen den Wert -1 annimmt.

Zur Berechnung des Charakters der Standarddarstellung müssen wir eine Basis von $W = \{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 + \cdots + x_4 = 0\}$ wählen. Seien e_1, e_2, e_3, e_4 die Standardbasisvektoren in $\mathbb{C}^4$. Dann bilden

$$f_1 = e_1 - e_2 \qquad f_2 = e_2 - e_3 \qquad f_3 = e_3 - e_4$$

eine Basis von W. Es gilt $\rho_3(\sigma)(e_j) = e_{\sigma(j)}$. Also

$$\begin{aligned}
\chi_{\rho_3}(1) &= \operatorname{Tr}(\mathbb{I}_3) = 3 \\
\chi_{\rho_3}(12) &= \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \\
\chi_{\rho_3}((12)(34)) &= \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -1 \\
\chi_{\rho_3}(123) &= \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\
\chi_{\rho_3}(1234) &= \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -1
\end{aligned}$$

(3) Hierbei handelt es sich um die Tensorproduktdarstellung $\operatorname{sgn} \otimes \rho_3$. Diese Information ist allerdings für die Lösung der Aufgabe unerheblich. Der Charakter berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}(1) &= \chi_{\operatorname{sgn}}(1)\chi_{\rho_3}(1) = 3 \\
\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}(12) &= \chi_{\operatorname{sgn}}(12)\chi_{\rho_3}(12) = -1 \\
\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}((12)(34)) &= \chi_{\operatorname{sgn}}((12)(34))\chi_{\rho_3}((12)(34)) = -1 \\
\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}(123) &= \chi_{\operatorname{sgn}}(123)\chi_{\rho_3}(123) = 0 \\
\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}(1234) &= \chi_{\operatorname{sgn}}(1234)\chi_{\rho_3}(1234) = 1
\end{aligned}$$

Eine Darstellung ist genau dann irreduzibel, wenn ihr Charakter Länge 1 hat. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
(\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}, \chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}) &= \frac{1}{|S_4|}\sum_{\sigma\in S_4} \overline{\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}(\sigma)}\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}(\sigma) \\
&= \frac{1}{24}\Big(|[(1)]|\, \overline{\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}((1))}\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}((1)) \\
&+ |[(12)]|\, \overline{\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}(12)}\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}(12) \\
&+ |[(12)(34)]|\, \overline{\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}((12)(34))}\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}((12)(34)) \\
&+ |[(123)]|\, \overline{\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}((123))}\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}((123)) \\
&+ |[(1234)]|\, \overline{\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}((1234))}\chi_{\operatorname{sgn}\otimes\rho_3}((1234)) \Big) \\
&= \frac{1}{24}(1\cdot 3^2 + 6\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1)^2 + 8\cdot 0^2 + 6\cdot 1^2) = 1
\end{aligned}$$

also ist die Darstellung irreduzibel. Da der Charakter von $\operatorname{sgn}\otimes\rho_3$ von dem Charakter von ρ_3 verschieden ist, sind die Darstellungen nicht isomorph.

(4) Sei $\sigma \in S_4$ und $A = \{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ eine zweielementige Teilmenge. Da σ bijektiv ist, ist auch $\sigma(A) := \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ eine zweielementige Teilmenge von $\{1, 2, 3, 4\}$. Auch das Komplement $A^c = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i, j\} = \{k, l\}$ ist eine zweielementige Teilmenge. Ferner gilt $\sigma(A^c) = (\sigma(A))^c$. Also Permutiert ein Element $\sigma \in S_4$ die drei Mengen

$$a = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\} \qquad b = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\} \qquad c = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$$

was einen Gruppenhomomorphismus $\phi : S_4 \to S_3$ definiert, indem wir a mit 1, b mit 2 und c mit 3 identifizieren.

Eine zweidimensionale Darstellung von S_3 ist die Standarddarstellung ρ_2 auf $\{x \in \mathbb{C}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Ihren Charakter kennen wir aus der Vorlesung:

$$\chi_{\rho_2}(1) = 2 \qquad \chi_{\rho_2}(12) = 0 \qquad \chi_{\rho_2}(123) = -1$$

Wir erhalten die zweidimensionale Darstellung $\rho_2 \circ \phi$ von S_4. Für den Charakter müssen wir die Bilder der fünf Repräsentanten der Konjugationsklassen von S_4 unter ϕ berechnen. Es gilt:

$\phi(1) = (1)$, da ϕ ein Homomorphismus ist. Ferner:

$$
\begin{aligned}
(12)a &= (12)\{\{1,2\},\{3,4\}\} = \{\{2,1\},\{3,4\}\} = a \\
(12)b &= (12)\{\{1,3\},\{2,4\}\} = \{\{2,3\},\{1,4\}\} = c \\
(12)c &= (12)\{\{1,4\},\{2,3\}\} = \{\{2,4\},\{1,3\}\} = b
\end{aligned}
$$

Also folgt $\phi(12) = (23)$. Ferner

$$
\begin{aligned}
(12)(34)a &= (12)(34)\{\{1,2\},\{3,4\}\} = \{\{2,1\},\{4,3\}\} = a \\
(12)(34)b &= (12)(34)\{\{1,3\},\{2,4\}\} = \{\{2,4\},\{1,3\}\} = b \\
(12)(34)c &= (12)(34)\{\{1,4\},\{2,3\}\} = \{\{2,3\},\{1,4\}\} = c
\end{aligned}
$$

Also folgt $\phi((12)(34)) = (1)$. Ferner

$$
\begin{aligned}
(123)a &= (123)\{\{1,2\},\{3,4\}\} = \{\{2,3\},\{1,4\}\} = c \\
(123)b &= (123)\{\{1,3\},\{2,4\}\} = \{\{2,1\},\{3,4\}\} = a \\
(123)c &= (123)\{\{1,4\},\{2,3\}\} = \{\{2,4\},\{3,1\}\} = b
\end{aligned}
$$

Also folgt $\phi(123) = (123)$. Ferner

$$
\begin{aligned}
(1234)a &= (1234)\{\{1,2\},\{3,4\}\} = \{\{2,3\},\{4,1\}\} = c \\
(1234)b &= (1234)\{\{1,3\},\{2,4\}\} = \{\{2,4\},\{3,1\}\} = b \\
(1234)c &= (1234)\{\{1,4\},\{2,3\}\} = \{\{2,1\},\{3,4\}\} = a
\end{aligned}
$$

Also folgt $\phi(1234) = (12)$. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\chi_{\rho_2\circ\phi}(1) &= \chi_{\rho_2}(1) = 2 \\
\chi_{\rho_2\circ\phi}(12) &= \chi_{\rho_2}(23) = 0 \\
\chi_{\rho_2\circ\phi}((12)(34)) &= \chi_{\rho_2}(1) = 2 \\
\chi_{\rho_2\circ\phi}(123) &= \chi_{\rho_2}(123) = -1 \\
\chi_{\rho_2\circ\phi}(1234) &= \chi_{\rho_2}(12) = 0
\end{aligned}
$$

Wir sehen, dass diese Darstellung von allen bisher gefundenen irreduziblen Darstellungen von S_4 verschieden ist, da ihr Charakter von den bisher gefundenen Charakteren verschieden ist. Es bleibt zu zeigen, dass sie irreduzibel ist. Dazu berechnen wir:

$$
\begin{aligned}
(\chi_{\rho_2\circ\phi}, \chi_{\rho_2\circ\phi}) &= \frac{1}{|S_4|} \sum_{\sigma\in S_4} \overline{\chi_{\rho_2\circ\phi}(\sigma)}\chi_{\rho_2\circ\phi}(\sigma) \\
&= \frac{1}{24}\Big(|[(1)]|\ \overline{\chi_{\rho_2\circ\phi}((1))}\chi_{\rho_2\circ\phi}((1)) \\
&+ |[(12)]|\ \overline{\chi_{\rho_2\circ\phi}(12)}\chi_{\rho_2\circ\phi}(12) \\
&+ |[(12)(34)]|\ \overline{\chi_{\rho_2\circ\phi}((12)(34))}\chi_{\rho_2\circ\phi}((12)(34)) \\
&+ |[(123)]|\ \overline{\chi_{\rho_2\circ\phi}((123))}\chi_{\rho_2\circ\phi}((123)) \\
&+ |[(1234)]|\ \overline{\chi_{\rho_2\circ\phi}((1234))}\chi_{\rho_2\circ\phi}((1234)) \Big) \\
&= \frac{1}{24}(1\cdot 2^2 + 6\cdot 0^2 + 3\cdot 2^2 + 8\cdot(-1)^2 + 6\cdot 0^2) = 1
\end{aligned}
$$

Also ist $\rho_2 \circ \phi$ irreduzibel.

Wir fassen unsere Berechnungen[1] in der Charaktertabelle von S_4 zusammen:

S_4	$[(1)]$	$[(12)]$	$[(12)(34)]$	$[(123)]$	$[(1234)]$
χ_{trivial}	1	1	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	1	1	-1
$\chi_{\rho_2 \circ \phi}$	2	0	2	-1	0
χ_{ρ_3}	3	1	-1	0	-1
$\chi_{\text{sgn} \otimes \rho_3}$	3	-1	-1	0	1

[1]Die Anzahl der Rechenfehler in dieser Aufgabe ist vermutlich von der Ordnung $\sim \frac{2\pi i}{\hbar}$. Wir sind jedoch zuversichtlich, dass sich die meisten gegenseitig herausheben.