MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
MUSTERLÖSUNG ZU SERIE 7

1. Aufgabe: Kronecker–Produkt von Matrizen

Der Matrix–Eintrag

$$(A \otimes B)_{(i',j'),(i,j)}$$

ist per Defintion der Koeffizient von $(f \otimes g)(v_i \otimes w_j)$ bezüglich dem Basisvektor $v'_{i'} \otimes w'_{j'}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
(f \otimes g)(v_i \otimes w_j) &= f(v_i) \otimes g(w_j) \\
&= \left(\sum_{i'=1}^{n'} A_{i'i} v'_{i'} \right) \otimes \left(\sum_{j'=1}^{m'} B_{j'j} w'_{j'} \right) \\
&= \sum_{\substack{i'=1,\dots,n' \\ j'=1,\dots,m'}} A_{i'i} B_{j'j} v'_{i'} \otimes w'_{j'}.
\end{aligned}$$

Also folgt

$$(A \otimes B)_{(i',j'),(i,j)} = A_{i'i} B_{j'j}.$$

In der gegebenen Anordnung der Basisvektoren ist also

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n'1}B & \cdots & a_{n'n}B \end{pmatrix}$$

in Blockmatrixschreibweise.

2. Aufgabe: Tensorprodukte von Darstellungen auf Funktionenräumen

(1) Wir definieren die Abbildung

$$\phi_0 : \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^{M \times N}$$

durch

$$\Big(\phi_0(f_1, f_2)\Big)(x,y) = f_1(x) f_2(y)$$

für alle $(x,y) \in M \times N$. Sie ist bilinear:

$$\begin{aligned}
\Big(\phi_0(f_1 + \lambda f'_1, f_2)\Big)(x,y) &= (f_1 + \lambda f'_1)(x) f_2(y) = f_1(x) f_2(y) + \lambda f'_1(x) f_2(y) \\
&= \bigg(\Big(\phi_0(f_1, f_2)\Big) + \lambda \Big(\phi_0(f'_1, f_2)\Big) \bigg)(x,y)
\end{aligned}$$

und analoge Rechnung für das zweite Argument. Nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes gibt es also eine lineare Abbildung

$$\phi : \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^{M \times N}$$

mit

$$\Big(\phi(f_1 \otimes f_2)\Big)(x,y) = \Big(\phi_0(f_1, f_2)\Big)(x,y) = f_1(x) f_2(y).$$

Wir zeigen, dass ϕ ein Isomorphismus ist. Für eine beliebige endliche Menge U und ein Element $u \in U$ bezeichne $\delta_u \in \mathbb{C}^U$ die Funktion

$$\delta_u(v) = \begin{cases} 1, & \text{falls } u = v, \\ 0, & \text{falls } u \neq v. \end{cases}$$

Die Funktionen $\{\delta_u : u \in U\}$ bilden für eine beliebige Anordnung eine Basis von $\mathbb{C}^U$. Für unsere Situation bedeutet dies folgendes: Die Vektoren $\delta_m \otimes \delta_n$ bilden für eine beliebige Anordnung von $m \in M$ und $n \in N$ eine Basis von $\mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^N$. Ebenso bilden die Vektoren $\delta_{(m,n)}$ für eine beliebige Anordnung von $(m,n) \in M \times N$ eine Basis von $\mathbb{C}^{M\times N}$. Ferner gilt

$$\phi(\delta_m \otimes \delta_n) = \delta_{(m,n)},$$

weshalb ϕ ein Isomorphismus ist.

(2) Für $m \in M$, $n \in N$, $g \in G$, $f_1 \in \mathbb{C}^M$ und $f_2 \in \mathbb{C}^N$ gilt

$$\begin{aligned} \phi\Big(\big(\rho_M \otimes \rho_N\big)(g)(f_1 \otimes f_2)\Big)(x,y) &= \phi\Big(\rho_M(g)(f_1) \otimes \rho_N(g)(f_2)\Big)(x,y) \\ &= \rho_M(g)(f_1)(x) \quad \rho_N(g)(f_2)(y) \\ &= f_1(g^{-1}x) \quad f_2(g^{-1}y) \\ &= \phi\Big(f_1 \otimes f_2\Big)(g^{-1}x, g^{-1}y) \\ &= \Big(\rho_{M\times N}(g)\phi\Big(f_1 \otimes f_2\Big)\Big)(x,y), \end{aligned}$$

also

$$\phi \circ (\rho_M \otimes \rho_N)(g) = \rho_{M\times N}(g) \circ \phi$$

für alle $g \in G$.

3. Aufgabe: Tensorprodukt von Projektionen

In Aufgabe 1 haben wir gesehen, dass das Kronecker–Produkt zweier Matrizen bei gewählter Basis dem Tensorprodukt der zugehörigen linearen Abbildungen entspricht. (Dies ist analog dazu, dass das Matrix–Produkt der Komposition von linearen Abbildungen entspricht.)

Für lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} f &: V \to V', & f' &: V' \to V'' \\ g &: W \to W', & g' &: W' \to W'' \end{aligned}$$

und Vektoren $v \in V$ und $w \in W$ gilt

$$(f' \otimes g')\Big((f \otimes g)(v \otimes w)\Big) = (f' \otimes g')(f(v) \otimes g(w)) = f'(f(v)) \otimes g'(g(w)).$$

Es folgt

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

wobei A eine $(n'' \times n')$–Matrix, B eine $(m'' \times m')$–Matrix, C eine $(n' \times n)$–Matrix und D eine $(m' \times m)$–Matrix ist.

(1) Es gilt

$$(P \otimes Q)^2 = (P \otimes Q)(P \otimes Q) = PP \otimes QQ = P \otimes Q.$$

(2) Es gilt

$$(I - P)^2 = I - P - P + P^2 = I - P,$$

und die Aussage folgt mit Teil (1).

(3) Es gilt

$$(Q \otimes Q)(P \otimes P) = QP \otimes QP = 0 \otimes 0 = 0.$$

4. Aufgabe: Tensorprodukt und Kommutator

(1) Es gilt

$$\begin{aligned}[A \otimes I_m, I_n \otimes B] &= (A \otimes I_m)(I_n \otimes B) - (I_n \otimes B)(A \otimes I_m) = AI_n \otimes I_m B - I_n A \otimes B I_m \\ &= A \otimes B - A \otimes B = 0.\end{aligned}$$

(2) Es gilt

$$[A \otimes C, B \otimes D] = (A \otimes C)(B \otimes D) - (B \otimes D)(A \otimes C) = AB \otimes CD - BA \otimes DC = 0,$$

da $AB = BA$ und $CD = DC$.