MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 2

1. Aufgabe: Gruppenautomorphismen und Produkte von Gruppen

Seien G und H Gruppen.

(1) Einen bijektiven Gruppenhomomorphismus nennt man Gruppenisomorphismus. Wir betrachten die Menge der Gruppenautomorphismen von G:

$$\mathrm{Aut}(G) := \{\phi : G \to G : \phi \text{ ist ein Gruppenisomorphismus}\}$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(G)$ unter der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet.

(2) Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $G \times H$ zusammen mit der Multiplikation

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

eine Gruppe bildet. Sie wird *direktes Produkt* von G und H genannt und man schreibt dafür $G \times H$.

(3) Sei $\rho : G \to \mathrm{Aut}(H)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $H \times G$ zusammen mit der Multiplikation

$$(h_1, g_1)(h_2, g_2) = (h_1 \rho(g_1)(h_2), g_1 g_2)$$

eine Gruppe bildet. Sie wird *semidirektes Produkt* von G und H genannt und man schreibt dafür $H \rtimes_\rho G$.

2. Aufgabe: Normalteiler und Faktorgruppen

Sei G die Symmetriegruppe eines regulären Sechsecks, und H die Untergruppe, die aus der Identität und den Drehungen um $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ um den Mittelpunkt des Sechsecks besteht.

(1) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von G ist.

(2) Zeigen Sie, dass $G/H \cong \big(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}\big) \times \big(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}\big)$.

3. Aufgabe: Die Gruppe $SO(3)$

Wir betrachten die Drehgruppe in drei Dimensionen:

$$SO(3) = \{A \in GL(3, \mathbb{R}) : A^T A = \mathbb{I}, \det A = 1\}$$

(1) Zeigen Sie, dass $SO(3)$ unter Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

(2) Zeigen Sie, dass es zu jeder Rotationsmatrix $A \in SO(3)$ eine Rotationsachse gibt, d.h. einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $Av = v$.

(3) Sei $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Wir definieren Stabilisatoruntergruppe von $SO(3)$ bezüglich v durch

$$SO(3)_v = \{A \in SO(3) : Av = v\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $A \in SO(3)$ gilt

$$SO(3)_{Av} = A\,SO(3)_v A^{-1} := \{ARA^{-1} : R \in SO(3)_v\}.$$

(b) Es gilt $SO(3)_v \cong SO(2)$.
Hinweis: Sie können verwenden, dass es zu jedem $v \in \mathbb{R}^3$ und jedem $w \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = \|w\|$ eine Drehmatrix $A \in SO(3)$ gibt, sodass $Av = w$.

4. Aufgabe: Eine Matrix–Gruppe

Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$A(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi+\psi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} & ie^{i\frac{\phi-\psi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \\ ie^{i\frac{\psi-\phi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} & e^{-i\frac{\phi+\psi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

mit $\phi, \theta, \psi \in \mathbb{R}$ unter Matrixmultiplikation eine Gruppe bilden. (Die Parameter ϕ, θ, ψ werden Euler–Winkel genannt und bilden Koordinaten auf S^3.)

Abgabe am 8./9. März in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 27.