MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 3

1. Aufgabe: Symmetriegruppe des regulären Tetraeders

Sei G die Symmetriegruppe eines regulären Tetraeders. Zeigen Sie, dass G zur Gruppe S_4 der Permutationen von $\{1, 2, 3, 4\}$ isomorph ist.

2. Aufgabe: Duale Darstellung

Sei G eine Gruppe. Sei (ρ, V) eine Darstellung der Gruppe G. Sei V^* der Dualraum von V.

(1) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \rho^* : G &\to GL(V^*) \\ g &\mapsto \big(\phi \mapsto \phi \circ \rho(g^{-1})\big), \phi \in V^* \end{aligned}$$

ebenfalls ein Darstellung von G ist. Sie heisst die *duale* oder *kontragrediente* Darstellung von G.

(2) Sei nun $V = \mathbb{K}^n$ mit Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ und $A(g)$ die Matrix von $\rho(g)$ bezüglich dieser Basis. Was ist die Matrix von $\rho^*(g)$ bezüglich der zu $(e_1, \ldots, e_n)$ dualen Basis $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$?

3. Aufgabe: Spezielle Unitäre Gruppe

(1) Zeigen Sie, dass

$$SU(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : \det A = 1, \overline{A}^T A = \mathbb{I}\}$$

eine Untergruppe von $GL(2, \mathbb{C})$ ist. Ist sie ein Normalteiler?

(2) Zeigen Sie, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \in SU(2) \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SU(2).$$

4. Aufgabe: Homogene Polynome

Sei U_n der Raum der komplexen homogenen Polynome vom Grad n in zwei Variablen z_1, z_2, d.h. von Polynomen der Form

$$p(z_1, z_2) = \sum_{j=0}^{n} a_j z_1^j z_2^{n-j}.$$

Der Ausdruck

$$\Big(\rho_n(A)p\Big)(z) = p(A^{-1}z), \quad A \in SU(2), p \in U_n, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

definiert eine Darstellung von $SU(2)$ auf U_n.

(1) Zeigen Sie, dass die Polynome

$$f_j(z_1, z_2) = z_1^j z_2^{n-j}, \qquad 0 \le j \le n$$

eine Basis von U_n bilden.

(2) Bestimmen Sie für $j = 0, \ldots, n$, $t \in \mathbb{R}$

$$\rho_n(A)(f_j) \qquad \text{für} \quad A = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(3) Sei $V \subset U_n$ ein invarianter Unterraum und

$$p(z_1, z_2) = \sum_{j=0}^{n} a_j f_j \in V.$$

Zeigen Sie: Ist $a_i \neq 0$, so ist auch $f_i \in V$.

(4) Zeigen Sie, dass die Darstellung ρ_n irreduzibel ist.

Abgabe am 15./16. März in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 27.