MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 4

1. Aufgabe: Konjugationsklassen in S_n

Sei $n \geq 1$. Sind $k_1, \dots, k_r \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschiedene Zahlen, so bezeichne

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix}$$

die Permutation in S_n, die alle Zahlen ungleich $k_1, \dots, k_r$ festlässt und die k_1 auf k_2, k_2 auf k_3, …, k_{r-1} auf k_r und k_r auf k_1 abbildet. Eine solche Permutation nennt man Zykel.

(1) In diesem Aufgabenteil sei $n = 7$. Schreiben Sie die Permutationen $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ in der in der Vorlesung verwendeten Schreibweise

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

(2) Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & \cdots & l_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \cdots & l_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_r \end{pmatrix},$$

falls $\{k_1, \dots, k_r\} \cap \{l_1, \dots, l_s\} = \emptyset$.

(3) Zeigen Sie: Jede Permutation lässt sich als Produkt von Zykeln schreiben, deren unterliegende Mengen paarweise disjunkt sind. Bis auf die Reihenfolge der Zykeln ist diese Darstellung eindeutig.

(4) Zeigen Sie: Zwei Permutationen sind genau dann konjugiert, wenn die Länge aller Zykeln in der Darstellung wie in (3) übereinstimmt.

2. Aufgabe: Charaktertafel von D_6

Sei $G = D_6$ die Symmetriegruppe eines regulären Sechsecks. Aus der Vorlesung ist folgendes bekannt: Die Konjugationsklassen von $D_6 = \{1, R, \dots, R^5, S, RS, \dots, R^5 S\}$ sind

$[1] = \{1\}$ $\quad [R] = \{R, R^5\}$ $\quad [R^2] = \{R^2, R^4\}$ $\quad [R^3] = \{R^3\}$

$[S] = \{S, R^2 S, R^4 S\}$ $\quad [RS] = \{RS, R^3 S, R^4 S\}$.

Wir kennen ferner die triviale Darstellung, die Standarddarstellung und die Determinantendarstellung. Die jeweiligen Charaktere wurden berechnet. Bisher kennen wir also folgende Einträge der Charaktertafel:

	$[1]$	$[R]$	$[R^2]$	$[R^3]$	$[S]$	$[RS]$
χ_{trivial}	1	1	1	1	1	1
χ_{Standard}	2	1	-1	-2	0	0
χ_{det}	1	1	1	1	-1	-1

Ziel der Aufgabe ist es, die Charaktertafel von D_6 zu vervollständigen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(1) G operiert auf der Menge der Paare gegenüberliegender Ecken des Sechsecks. Dies definiert einen Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to S_3$. Zeigen Sie, dass ϕ surjektiv ist, und bestimmen Sie den Kern.

(2) Sei ρ_p die irreduzible zweidimensionale Darstellung von S_3. Bestimmen Sie den Charakter der Darstellung $\rho_p \circ \phi$.

(3) In das Sechseck lassen sich zwei gleichseitige Dreiecke einschreiben, deren Ecken auch Ecken des Sechsecks sind. Verwenden Sie dies, um erst einen Homomorphismus $\psi : G \to S_2$ und dann eine eindimensionale Darstellung von G zu konstruieren.

(4) Bestimmen Sie die Charaktertafel von G.

Abgabe am 22./23. März in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 27.