

**MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER  
SERIE 5**

1. AUFGABE: CHARAKTERTAFELN

Bestimmen Sie die Charaktertafel von  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

2. AUFGABE: DARSTELLUNGEN DER PERMUTATIONSGRUPPE

Die Gruppe  $S_3$  operiert auf dem Raum  $M(3 \times 3, \mathbb{C})$  aller komplexen  $(3 \times 3)$ -Matrizen durch

$$\rho(\sigma)(a_{ij}) = (a_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)}), \quad \sigma \in S_3.$$

Dies definiert eine Darstellung  $\rho$  von  $S_3$  auf  $M(3 \times 3, \mathbb{C})$ .

(1) Sei  $E_{kl} = (\delta_{ki}\delta_{lj})_{1 \leq i, j \leq 3}$ . Zeigen Sie:

$$\forall \sigma \in S_3 : \rho(\sigma)(E_{kl}) = E_{\sigma(k)\sigma(l)}.$$

(2) Zeigen Sie, dass

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & 0 & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & 0 \end{pmatrix} : x_{12} + x_{13} + x_{23} = 0 \right\}$$

ein invarianter irreduzibler Unterraum ist, und dass die Darstellung auf diesem Unterraum isomorph zur Standarddarstellung  $\rho_2$  von  $S_3$  auf  $W = \{x \in \mathbb{C}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  ist.

(3) Zeigen Sie: Für all  $\sigma \in S_3$ :

$$\rho(\sigma) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (\text{sgn}\sigma) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) Zeigen Sie:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & -x_{13} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} \\ x_{13} & -x_{23} & 0 \end{pmatrix} : x_{12} + x_{13} + x_{23} = 0 \right\}$$

ist ein invarianter Unterraum, isomorph zum Produkt der Darstellung  $\rho_2$  mit dem Charakter der Signumdarstellung.

3. AUFGABE: FALTUNG VON FUNKTIONEN

Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Sei  $\mathbb{C}^G$  der Raum aller komplexwertigen Funktionen auf  $G$ . Wir definieren die Faltung auf  $\mathbb{C}^G$  durch

$$(\phi * \psi)(g) = \sum_{h \in G} \phi(gh^{-1})\psi(h).$$

(1) Zeigen Sie:  $*$  ist assoziativ, also

$$(\phi_1 * \phi_2) * \phi_3 = \phi_1 * (\phi_2 * \phi_3).$$

(2) Zeigen Sie: Sind  $\phi, \psi$  Klassenfunktionen, so ist auch  $\phi * \psi$  eine Klassenfunktion und  $\phi * \psi = \psi * \phi$ .

*Abgabe am 29./30. März in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 27.*