MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 6

1. Aufgabe: Burnside–Matrizen

Seien $C_1, \dots, C_k$ die Konjugationsklassen in einer endlichen Gruppe G. Für $j \in \{1, \dots, k\}$ bezeichne j' den Index der Konjugationsklasse $[g^{-1}]$, wobei $g \in C_j$.

(1) Zeigen Sie, dass die Abbildung $j \mapsto j'$ auf $\{1, \dots, k\}$ wohldefiniert ist.

(2) Für $1 \le r, s, t \le k$ sei

$$a_{rst} = \frac{1}{|C_t|} |\{(g,h) \in C_r \times C_s : gh \in C_t\}|.$$

Zeigen Sie:

(a) $a_{rst} \in \mathbb{N}_0$.

(b) $a_{r's't} = a_{rst'}$.

(c) $\delta_{C_r} * \delta_{C_s} = \sum_{t=1}^{k} a_{rst} \delta_{C_t}$.

Die Matrizen

$$A_r = \left(\sqrt{\frac{|C_t|}{|C_s|} a_{rst}} \right)_{1 \le s,t \le k}$$

heissen die Burnside–Matrizen von G. Man kann zeigen, dass die Burnside–Matrizen $A_1, \dots, A_k$ untereinander kommutieren, und dass die Zeilen der Charaktertafel Eigenvektoren aller Burnside–Matrizen sind.

2. Aufgabe: Charaktertafel von S_4

(1) Geben Sie eine Liste der Konjugationsklassen der symmetrischen Gruppe S_4.

(2) Berechnen Sie die Charaktere der trivialen Darstellung, der Signums–Darstellung, und der Standarddarstellung ρ_3 durch Permutationen auf $W = \{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 + \dots + x_4 = 0\}$.

(3) Ist die Darstellung

$$\begin{aligned} S_4 &\to GL(W) \\ \sigma &\mapsto \operatorname{sgn}(\sigma)\rho_3(\sigma) \end{aligned}$$

irreduzibel? Ist sie isomorph zu ρ_3?

(4) Verwenden Sie (wie in der Vorlesung gezeigt) die Tatsache, dass S_3 auf der Menge aller zweielementigen Teilmengen von $\{1, \dots, 4\}$ operiert, um einen Homomorphismus von S_4 nach S_3 zu konstruieren. Konstruieren Sie damit eine zweidimensionale Darstellung von S_4.

Abgabe am 5./6. April in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 27.