MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 7

1. Aufgabe: Kronecker–Produkt von Matrizen

Seien V, V', W, W' Vektorräume der Dimensionen n, n', m, m'. Seien

$$f : V \to V'$$
$$g : W \to W'$$

lineare Abbildungen. Das Tensorprodukt $f \otimes g$ dieser Abbildungen ist diejenige lineare Abbildung

$$f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W',$$

die $(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$ für alle $v \in V$ und $w \in W$ erfüllt.

Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_{n'})$ eine Basis von V', $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W und $\mathcal{C}' = (w'_1, \dots, w'_{m'})$ eine Basis von W'.

Es sei

$$A = (A_{i'i})_{\substack{i'=1,\dots,n' \\ i=1,\dots,n}}$$

die Matrix von f bezüglich den Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$, und

$$B = (B_{j'j})_{\substack{j'=1,\dots,m' \\ j=1,\dots,m}}$$

die Matrix von g bezüglich den Basen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$.

Was ist die Matrix der linearen Abbildung $f \otimes g$ bezüglich den Basen

$$(v_1 \otimes w_1, \dots, v_1 \otimes w_m, \quad v_2 \otimes w_1, \dots, v_2 \otimes w_m, \quad \dots, v_n \otimes v_m) \quad \text{von } V \otimes W \text{ und}$$
$$(v'_1 \otimes w'_1, \dots, v'_1 \otimes w'_{m'}, \quad v'_2 \otimes w'_1, \dots, v'_2 \otimes w'_{m'}, \quad \dots, v'_{n'} \otimes v'_{m'}) \quad \text{von } V' \otimes W'?$$

Diese Matrix wird Kronecker–Produkt $A \otimes B$ der Matrizen A und B genannt.

2. Aufgabe: Tensorprodukte von Darstellungen auf Funktionenräumen

Seien M, N endliche Mengen. $\mathbb{C}^M$ bezeichne den Raum der komplexwertigen Funktionen auf M.

(1) Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus

$$\phi : \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^{M \times N}$$

gibt, so dass für Funktionen $f_1 \in \mathbb{C}^m$, $f_2 \in \mathbb{C}^N$

$$\Big(\phi(f_1 \otimes f_2)\Big)(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

für alle $(x, y) \in M \times N$ gilt.

(2) Sei G eine Gruppe die auf M und N operiert. Dann erhält man Darstellungen ρ_M, ρ_N und $\rho_{M \times N}$ von G auf $\mathbb{C}^M$, $\mathbb{C}^N$ und $\mathbb{C}^{M \times N}$ durch

$$\rho_M(g)(f_1)(x) = f_1(g^{-1}x), \quad \text{für } f_1 \in \mathbb{C}^M, x \in M$$
$$\rho_N(g)(f_2)(y) = f_2(g^{-1}y), \quad \text{für } f_2 \in \mathbb{C}^N, y \in N$$
$$\rho_{M \times N}(g)(f)(x, y) = f(g^{-1}x, g^{-1}y), \quad \text{für } f \in \mathbb{C}^{M \times N}, (x, y) \in M \times N$$

für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass der Isomorphismus ϕ aus dem ersten Aufgabenteil äquivariant ist.

3. Aufgabe: Tensorprodukt von Projektionen

Seien P und Q zwei $(n \times n)$–Matrizen und I die $(n \times n)$–Einheitsmatrix. Es gelte

$$P^2 = P \qquad Q^2 = Q.$$

(1) Zeigen Sie, dass

$$(P \otimes Q)^2 = P \otimes Q.$$

(2) Zeigen Sie, dass

$$(P \otimes (I - P))^2 = P \otimes (I - P).$$

(3) Berechnen Sie $(Q \otimes Q)(P \otimes P)$ unter der Annahme $QP = 0$.

4. Aufgabe: Tensorprodukt und Kommutator

(1) Sei A eine $(n \times n)$–Matrix und B eine $(m \times m)$–Matrix. Sei I_n die $(n \times n)$–Einheitsmatrix und I_m die $(m \times m)$–Einheitsmatrix. Berechnen Sie

$$[A \otimes I_m, I_n \otimes B].$$

(2) Seien A, B, C und D $(n \times n)$–Matrizen mit

$$[A, B] = 0 \qquad [C, D] = 0.$$

Berechnen Sie $[A \otimes C, B \otimes D]$.

Abgabe am 12./13. April in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 27.