MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 9

1. Aufgabe: Jacobiidentität für Matrizen

Zeigen Sie, dass der Kommutator

$$[A, B] = AB - BA$$

für Quadratmatrizen die Jacobi–Identität erfüllt:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

2. Aufgabe: Bewegte Beobachter und Lorentz–Boosts

Wir betrachten einen Beobachter S und eine Beobachterin T, die sich vom Beobachter S aus gesehen mit der Geschwindigkeit $v > 0$ in positiver z–Richtung bewegt. Wir nehmen an, dass sowohl Beobachter S als auch Beobachterin T ihre Uhren so gestell haben, dass sich bei der Zeit 0 beide am selben Ort befinden.

In der Physik lernt man über die spezielle Relativitätstheorie folgendes: Wenn Beobachter S einem Ereignis E die Raumzeit–Koordinaten (t, x, y, z) zuordnet, und Beobachterin T demselben Ereignis die Raumzeit–Koordinaten (t', x', y', z') zuordnet, so gilt

$$t' = \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x' = x \qquad y' = y \qquad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

wobei c die unabhängig von den Beobachtern definierte Lichtgeschwindigkeit ist. Ferner gilt $v < c$.

Formulieren Sie diesen Sachverhalt mathematisch. Diese Beschreibung sollte folgende zwei Kriterien erfüllen:

(1) Beide Beobachter beschreiben dasselbe Ereignis.
(2) Die verschiedenen Koordinaten beider Beobachtungen sind durch eine Lorentz–Transformation verbunden. Welche?

3. Aufgabe: Quaternionen und $SU(2)$

Es sei $\mathbb{I}$ die (2×2)–Einheitsmatrix und σ_1, σ_2 und σ_3 die Pauli–Matrizen. Die Menge der Quaternionen $\mathbb{H}$ ist definiert als der durch $\mathbb{I}, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ aufgespannte, reelle Untervektorraum des Raumes aller komplexen (2×2)–Matrizen. Der Raum $\mathbb{H}$ ist abgeschlossen unter Matrixmultiplikation. Zeigen Sie

$$\mathbb{H} = \{\lambda A : \lambda \in \mathbb{R}, A \in SU(2)\}.$$

Zeigen Sie ferner, dass $\mathbb{H}$ unter Matrixmultiplikation ein Schiefkörper ist, d.h. jedes von Null verschiedene Element von $\mathbb{H}$ ein multiplikatives Inverses besitzt.

4. Aufgabe: Der Homomorphismus $SU(2) \times SU(2) \to SO(4)$

Sei

$$V = \{\lambda A : \lambda \in \mathbb{R}, A \in SU(2)\}.$$

(1) Zeigen Sie

$$V = \{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

(2) Zeigen Sie, dass

$$(X, Y) \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{tr} XY^*$$

ein Skalarprodukt auf dem vierdimensionalen reellen Vektorraum V definiert.

(3) Für $(A, B) \in SU(2) \times SU(2)$ sei

$$\begin{aligned} \rho(A, B) : V &\to V \\ X &\mapsto AXB^*. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: $\rho(A, B)$ ist wohldefiniert und

$$\rho : SU(2) \times SU(2) \to O(V)$$

ist eine orthogonale Darstellung mit Bild in $SO(V)$.

(4) Zeigen Sie: ρ ist surjektiv $(*)$ und $\ker \rho = \{\pm(\mathbb{I}, \mathbb{I})\}$.

Abgabe am 3./4. Mai in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 27.