MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 10

1. Aufgabe: Lie–Klammer von Vektorfeldern

Sind

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \text{und} \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

zwei C^∞–Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$, so ist ihre Lie–Klammer $[X,Y]$ das Vektorfeld

$$[X,Y] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Zeigen Sie:

(1) Für jede C^∞–Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ ist

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

(2) Der Raum V aller C^∞–Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$ bildet mit der Lieklammer eine Lie–Algebra.

Sei $n = 2m$ gerade. Sind f und g zwei C^∞–Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, so ist ihre Poisson–Klammer $\{f,g\}$ die Funktion

$$\{f,g\} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial g}{\partial x^{k+m}} - \frac{\partial f}{\partial x^{k+m}}\frac{\partial g}{\partial x^k} \right).$$

Ist f eine C^∞–Funktion, so ist ihr Hamiltonsches Vektorfeld X_f das Vektorfeld

$$X_f = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^{m+k}} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^{m+k}}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

(3) Zeigen Sie

$$X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g].$$

2. Aufgabe: Adjungierte Darstellung

Für ein Element v einer Lie–Algebra L definieren wir die lineare Abbildung $\operatorname{ad} v$ durch

$$\operatorname{ad} v(w) = [v,w].$$

Sei

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis der Lie–Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

(1) Berechnen Sie die Matrizen der Abbildungen $\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} h$ und $\operatorname{ad} y$ in dieser Basis.
(2) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} h$ und $\operatorname{ad} y$.
(3) Bilden die Abbildungen $\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} h, \operatorname{ad} y$ eine Basis einer Lie–Algebra unter dem Kommutator? Falls ja, ist diese Lie–Algebra isomorph zu $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$?

3. Aufgabe: Killing–Form

Sei L eine Lie–Algebra. Für $x, y \in L$ definieren wir

$$\kappa(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y),$$

wobei $\mathrm{ad}\, x : L \to L$ wie in der vorigen Aufgabe definiert ist. Die Bilinearform κ wird als Killing–Form bezeichnet.

(1) Zeigen Sie

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]).$$

Für eine Lie–Unteralgebra $B \subset L$ definieren wir

$$[B, B] = \mathrm{span}\{[b_1, b_2] : b_1, b_2 \in B\}.$$

Wir definieren rekursiv:

$$L^2 = [L, L], L^3 = [L^2, L], \ldots, L^k = [L^{k-1}, L].$$

Eine Lie–Algebra L heisst *nilpotent*, falls $L^n = 0$ für eine natürliche Zahl n.

(2) Zeigen Sie, dass $\kappa(x, y) = 0$ für alle $x, y \in L$, falls L nilpotent ist.

Abgabe am 10./11. Mai in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 27.