MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 11

1. Aufgabe: Heisenberggruppe

Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{h} = \{ \begin{pmatrix} 0 & p & c \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : p, q, c \in \mathbb{R}\}$$

eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ ist, und bestimmen Sie den Kommutator zweier Elemente in $\mathfrak{h}$. Finden Sie eine Matrix Lie Gruppe H, sodass $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$.

2. Aufgabe: Strukturkonstanten

Sei $\mathfrak{g}$ eine endliche–dimensionale Lie–Algebra und $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Da $[v_i, v_j] \in \mathfrak{g}$ gibt es Skalare C_{ij}^k mit

$$[v_i, v_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k v_k.$$

Die Skalare C_{ij}^k werden Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$ bezüglich der Basis $(v_1, \dots, v_n)$ genannt.

(1) Zeigen Sie, dass die Antisymmetrie und die Jacobi–Identität der Lieklammer zu den Gleichungen

$$C_{ij}^l + C_{ji}^l = 0, \qquad \forall i, j, l,$$
$$\sum_{a=1}^{n} C_{ij}^a C_{ka}^l + C_{ki}^a C_{ja}^l + C_{jk}^a C_{ia}^l = 0, \qquad \forall i, j, k, l$$

äquivalent sind.

(2) Zeigen Sie, dass die Killing Form $\kappa(u, v) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u \circ \mathrm{ad}_v)$ in der Basis $(v_1, \dots, v_n)$ durch

$$\kappa(v_i, v_j) = \sum_{kl} C_{il}^k C_{jk}^l$$

gegeben ist.

(3) Zeigen Sie, dass $\sum_{a=1}^{n} C_{ij}^a \,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}(v_a) = 0$ für alle i, j.

3. Aufgabe: Symplektische Gruppe

Die Symplektische Gruppe ist definiert als

$$Sp(2n) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) : A^T J A = J\},$$

wobei

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Als abgeschlossene Untergruppe von $GL(2n, \mathbb{R})$ ist $Sp(n)$ eine Matrix–Lie–Gruppe. Bestimmen Sie ihre Lie–Algebra.

4. Aufgabe: Das Kepler–Problem

Ein Punktteilchen der Masse m im Gravitationsfeld einer Masse μ im Ursprung hat den Phasenraum $P = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$. Seine Bahn

$$t \mapsto (q(t), p(t)) \in P$$

erfüllt nach dem 2. Newtonschen Gesetz die Differentialgleichung

$$(\star) \qquad \frac{dq(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m}, \qquad \frac{dp(t)}{dt} = -\mu \frac{q(t)}{\|q(t)\|^3}.$$

Wir betrachten die folgenden Funktionen auf dem Phasenraum P:

$$\begin{array}{lll} r : P \to \mathbb{R} & T : P \to \mathbb{R} \text{ (Kinetische Energie)} & H : P \to \mathbb{R} \text{ (Totale Energie)} \\ r(q,p) = \|q\| & T(q,p) = \dfrac{1}{2m}\|p\|^2 & H(q,p) = \dfrac{1}{2m}\|p\|^2 - \mu \dfrac{1}{r(q,p)} \\ L : P \to \mathbb{R}^3 \text{ (Drehimpuls)} & F : P \to \mathbb{R}^3 \text{ (Lenz Vektor)} & \\ L(q,p) = q \times p & F(q,p) = p \times L(q,p) - m\mu \dfrac{q}{r(q,t)} & . \end{array}$$

(1) Zeigen Sie, dass H eine Hamiltonfunktion für das Kepler–System ist, also

$$\frac{dq(t)}{dt} = (\nabla_p H)(q(t), p(t)), \qquad \frac{dp(t)}{dt} = -(\nabla_q H)(q(t), p(t))$$

äquivalent zur Differentialgleichung $(\star)$ ist.

(2) Zeigen Sie, dass q, p und $F(q,p)$ senkrecht zu $L(q,p)$ stehen.

(3) Zeigen Sie, dass $L(q,p), F(q,p)$ und $H(q,p)$ konstant entlang Lösungen von $(\star)$ sind.

(4) Zeigen Sie die folgenden Gleichungen für $(q,p) \in P$ bzw. Lösungen $(q(t), p(t))$ von $(\star)$.

$$\|F(q,p)\|^2 = 2m\|L(q,p)\|^2 H(q,p) + (m\mu)^2,$$
$$F(q,p) \cdot q = \|L(q,p)\|^2 - m\mu r(q,p),$$
$$\|p(t)\|^2 = m^2 \left(\frac{dr(q(t),p(t))}{dt}\right)^2 + \frac{1}{r(q(t),p(t))^2}\|L(q(t),p(t))\|^2,$$
$$H(q(t),p(t)) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr(q(t),p(t))}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2m}\frac{1}{r(q(t),p(t))^2}\|L(q(t),p(t))\|^2 - \mu \frac{1}{r(q(t),p(t))}.$$

Wir betrachten die Funktionen

$$A_k = \frac{1}{2}\Big(L_k + \frac{1}{\sqrt{-2mH}} F_k\Big) : E \to \mathbb{R}, \; k = 1,2,3,$$
$$B_k = \frac{1}{2}\Big(L_k - \frac{1}{\sqrt{-2mH}} F_k\Big) : E \to \mathbb{R}, \; k = 1,2,3,$$

auf der Menge

$$E = \{(q,p) \in P : H(q,p) < 0, L(q,p) \neq 0\}.$$

Sie sind Elemente der Algebra $C^\infty(E)$ der glatten Funktionen auf E. Die Algebra $C^\infty(E)$ bildet zusammen mit der Poisson–Klammer $\{-,-\}$ eine Lie Algebra.

(5) Zeigen Sie, dass für $k, l = 1,2,3$

$$\{A_k, A_l\} = \sum_{j=1}^{3} \epsilon_{klj} A_j, \qquad \{B_k, B_l\} = \sum_{j=1}^{3} \epsilon_{klj} B_j, \qquad \{A_k, B_l\} = 0$$

und schliessen Sie daraus, dass eine zu $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$ isomorphe Lie Unteralgebra in $C^\infty(E)$ existiert.

Abgabe am 17./18. Mai in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 27.