MMP II – FS 2017 – PROF. DR. HORST KNÖRRER
SERIE 12

1. Aufgabe: Clebsch–Gordan Zerlegung

Sei ρ_n die Darstellung von $SL(2,\mathbb{C})$ auf dem Raum der homogenen Polynome vom Grad n in zwei Variablen, gegeben durch

$$\rho_n(A)f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f(A^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})$$

Sei χ_n der Charakter von ρ_n.

(1) Berechnen Sie

$$\chi_n\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots$ linear unabhängig sind.

(2) Beweisen Sie die Clebsch–Gordan–Formel

$$\rho_m \otimes \rho_n \cong \rho_{m+n} \oplus \rho_{m+n-2} \oplus \cdots \oplus \rho_{m-n}$$

für $m \geq n \geq 0$. Verwenden Sie dazu, dass die Darstellungen von $SL(2,\mathbb{C})$ vollständig reduzibel sind und dass die ρ_n – bis auf Isomorphie – die einzigen irreduziblen Darstellungen von $SL(2,\mathbb{C})$ sind.

2. Aufgabe: Hermitesche Reziprozität

Sei ρ eine Darstellung einer Gruppe G auf dem reellen oder komplexen Vektorraum V. Dann ist das k–fache Tensorprodukt

$$\rho^{\otimes k} = \rho \otimes \cdots \otimes \rho : G \to \mathrm{End}(V^{\otimes k})$$

eine Darstellung von G auf dem Vektorraum

$$V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V.$$

Die symmetrische Gruppe S_k operiert auf $V^{\otimes k}$ durch Permutation der Faktoren: Für reine Tensoren $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in V^{\otimes k}$ und $\sigma \in S_k$ gilt

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)},$$

was linear auf ganz $V^{\otimes k}$ erweitert wird. Wir betrachten den Untervektorraum $\mathrm{Sym}^k(V) \subset V^{\otimes k}$ der symmetrischen Tensoren, deniniert durch

$$\mathrm{Sym}^k(V) = \{v \in V^{\oplus k} : \sigma v = v \text{ für alle } \sigma \in S_k\}.$$

Gelegentlich wird das symmetrische Tensorprodukt auch als Quotientenraum definiert: Sei

$$S^k(V) = V^{\otimes k}/W$$

wobei der Unterraum $W \subset V^{\otimes k}$ durch alle Vektoren der Form $(\sigma v - v)$ mit $v \in V^{\otimes k}$ und $\sigma \in S_k$ erzeugt wird.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}^k(V)$ und W invariante Unterräume von $V^{\otimes k}$ bezüglich $\rho^{\otimes k}$ sind.

Wir wissen also, dass $\rho^{\otimes k}$ durch Einschränkung bzw. Quotientenbildung Darstellungen

$$\mathrm{Sym}^k(\rho) : G \to \mathrm{End}(\mathrm{Sym}^k(V)), \qquad S^k(\rho) : G \to \mathrm{End}(S^k(V))$$

von G auf $\mathrm{Sym}^k(V)$ bzw. $S^k(V)$ definiert.

(2) Zeigen Sie $\mathrm{Sym}^k(\rho) \cong S^k(\rho)$.

Sie können im Folgenden mit der Konstruktionen des Symmetrischen Tensorproduktes Ihrer Wahl arbeiten. Sei nun $G = SL(2,\mathbb{C})$ und $\rho = \rho_k$ die Darstellung auf dem Raum $V = U_k$ der homogenen Polynome in zwei Variablen vom Grad k.

(3) Zeigen Sie $S^k(\rho_1) \cong \rho_k$ und geben Sie den Isomorphismus $S^k(U_1) \to U_k$ explizit an.
(4) Zeigen Sie $S^k(\rho_l) \cong S^l(\rho_k)$.

3. Aufgabe: Induzierter Homomorphismus

Der in der Vorlesung betrachtete Homomorphismus

$$\phi : SU(2) \to SO(3)$$

erfüllt

$$\phi\Big(\mathbb{I}\cos(\theta/2) - i(n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3)\sin(\theta/2)\Big) = R(n,\theta),$$

wobei $R(n,\theta)$ die Drehung des $\mathbb{R}^3$ um die Achse $n \in \mathbb{R}^3$ mit $|n| = 1$ um den Winkel θ ist und

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Pauli–Matrizen sind.

(1) Verwenden Sie dies, um den induzierten Homomorphismus

$$\phi_* : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$$

zu berechnen.
(2) Zeigen Sie $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$.

Abgabe am 24./25. Mai in den Fächern im HG F 27.