Prof. G. Felder D-PHYS, D-MATH, D-CHAB ETH Zürich, Winter 2016/17

MMP II - Prüfung

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nummer:	
Departement:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
Total		

Vollständigkeit	

Hinweise

Prüfungsdauer: 2 Stunden.

Hilfsmittel: Wörterbuch

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Die Prüfung besteht aus diesem Deckblatt, einem Blatt mit 5 Aufgaben, und einer beiliegenden Formelsammlung.
- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer in das Deckblatt ein.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber. Kein Tipp-Ex!
- Bei der Bewertung wird jede Aufgabe **gleich** gewichtet. Die maximale Punktzahl jeder Aufgabe ist **16**.
- Beginnen Sie **jede** Aufgabe auf einem **neuen** Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Lassen Sie am Rand genügend Platz für die Korrekturen.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist freigestellt.
- Alle Lösungsschritte müssen ausreichend begründet werden.
- Geben Sie pro Aufgabe nur **eine** Lösung ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. Bei jeder Aussage kreuzen Sie auf dem Aufgabenblatt an, ob sie wahr (W) oder falsch (F) ist (2 Punkte für jedes richtig gesetzte Kreuz).

a) Eine Gruppe der Ordnung n hat höchstens n paarweise inäquivalente irreduzible Darstellungen.

W☐ F☐

b) Die Lie-Algebra von $SU(5)$ ist ein 5-dimensionaler reeller Vektorraum.

W☐ F☐

c) Jede komplexe endlichdimensionale Darstellung von $SO(3)$ ist vollständig reduzibel.

W☐ F☐

d) Jede endlichdimensionale komplexe Darstellung der Gruppe $\mathbb{R}$ (mit der Addition als Gruppenoperation) ist vollständig reduzibel.

W☐ F☐

e) Die orthogonale Gruppe $O(3)$ hat zwei Zusammenhangskomponenten.

W☐ F☐

f) Für alle $n \times n$-Matrizen A gilt: $\exp(A)\exp(A) = \exp(2A)$.

W☐ F☐

g) Die Lie-Algebra der unitären Gruppe $U(n)$ besteht aus allen komplexen $n \times n$-Matrizen $A = (a_{ij})$, so dass $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

W☐ F☐

h) Jede Gruppe besitzt eine endlichdimensionale irreduzible unitäre Darstellung.

W☐ F☐

Aufgabe 2. Sei $D_2 = \{1, r, s, rs\}$ die Gruppe der Isometrien der Ebene, die eine Strecke AB mit Mittelpunkt M auf sich selbst abbilden: r ist eine Drehung um $180°$ mit Drehzentrum M, s die Spiegelung an der Gerade durch A und B und $rs = sr$ die Spiegelung an der Mittelsenkrechte zur Strecke AB.

a) Finden Sie alle komplexen irreduziblen Darstellungen von D_2 und bestimmen Sie die Charaktertafel von D_2.

b) Zeigen Sie, dass

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Darstellung $\rho\colon D_2 \to GL(3, \mathbb{C})$ definieren und zerlegen Sie den Darstellungsraum $\mathbb{C}^3$ als direkte Summe von irreduziblen invarianten Unterräumen.

Aufgabe 3. Seien V_1, V_s, V_2 die komplexen irreduziblen Darstellungen von S_3: V_1 ist die triviale Darstellung, V_s die alternierende Darstellung, V_2 die (bis auf äquivalenz eindeutige) 2-dimensionale irreduzible Darstellung. Es bezeichne $V_2^{\otimes n} = V_2 \otimes \cdots \otimes V_2$ (n Faktoren) das n-fache Tensorprodukt von V_2 mit sich selbst.

a) Zeigen Sie, dass für n gerade
$$V_2^{\otimes n} \cong \frac{2^{n-1}+1}{3} V_1 \oplus \frac{2^{n-1}+1}{3} V_s \oplus \frac{2^n-1}{3} V_2,$$
wobei die Koeffizienten die Vielfachheiten in der Zerlegung in irreduziblen Darstellungen bezeichnen.

b) Wie lautet die entsprechende Formel für n ungerade?

Aufgabe 4. Seien A, B zwei $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen.

a) Zeigen Sie: für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\begin{aligned} &\exp(tA)B\exp(-tA) \\ &\quad = B + t[A,B] + \frac{t^2}{2!}[A,[A,B]] + \frac{t^3}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \cdots . \end{aligned}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass beide Seiten dieselbe Differenzialgleichung mit derselben Anfangsbedingung erfüllen.

b) Es gelte $[A,[A,B]] = 0$. Zeigen Sie:
$$\exp(A)\exp(B) = \exp(B + [A,B])\exp(A).$$

c) Es gelte $[A,B] = \lambda B$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
$$\exp(A)\exp(B) = \exp(e^{\lambda}B)\exp(A).$$

Aufgabe 5. Sei $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $SU(1,1) = \{A \in SL(2,\mathbb{C}), AJA^* = J\}$

a) Zeigen Sie, dass $SU(1,1)$ eine Untergruppe von $SL(2,\mathbb{C})$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $SU(1,1)$ aus den Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{smallmatrix}\right)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ besteht.

c) Finden Sie eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(1,1)$ von $SU(1,1)$.

d) Zeigen Sie, dass $A = \left(\begin{smallmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathfrak{su}(1,1)$ liegt und berechnen Sie $\exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$.