Prof. G. Felder D-PHYS, D-MATH, D-CHAB ETH Zürich, Frühjahr 2016

MMP II - Prüfung

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nummer:	
Departement:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
Total		

Vollständigkeit	

Hinweise

Prüfungsdauer: 2 Stunden.

Hilfsmittel: ein Wörterbuch

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Die Prüfung besteht aus diesem Deckblatt, einem Blatt mit 5 Aufgaben, und einer beiliegenden Formelsammlung.
- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer in das Deckblatt ein.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber. Kein Tipp-Ex!
- Bei der Bewertung wird jede Aufgabe **gleich** gewichtet. Die maximale Punktzahl jeder Aufgabe ist **16**.
- Beginnen Sie **jede** Aufgabe auf einem **neuen** Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Lassen Sie am Rand genügend Platz für die Korrekturen.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist freigestellt.
- Alle Lösungsschritte müssen ausreichend begründet werden.
- Geben Sie pro Aufgabe nur **eine** Lösung ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. Bei jeder Aussage kreuzen Sie auf dem Aufgabenblatt an, ob sie wahr (W) oder falsch (F) ist (2 Punkte für jedes richtig gesetzte Kreuz).

a) Alle komplexen irreduziblen Darstellungen der Diedergruppe D_5 (der Isometriegruppe eines regulären Fünfecks) sind eindimensional.

W☐ F☐

b) Jede 5-dimensionale komplexe Darstellung von $SU(2)$ ist irreduzibel.

W☐ F☐

c) Es gibt keine irreduzible Darstellung von $SO(3)$ auf einem 6-dimensionalen komplexen Vektorraum.

W☐ F☐

d) Jede endlichdimensionale komplexe Darstellung der symmetrischen Gruppe S_n ist vollständig reduzibel.

W☐ F☐

e) Die Lorentzgruppe $O(1,3)$ ist zusammenhängend.

W☐ F☐

f) Für alle 2×2-Matrizen A, B gilt: $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B)$.

W☐ F☐

g) Die Lie-Algebra der orthogonalen Gruppe $O(n)$ besteht aus allen reellen $n \times n$-Matrizen $A = (a_{ij})$, so dass $a_{ij} = -a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

W☐ F☐

h) Die $n \times n$-Matrizen mit Determinante 1 bilden eine Lie-Algebra mit Lie-Klammer $[A, B] = AB - BA$.

W☐ F☐

Aufgabe 2. Sei V ein komplexer Vektorraum mit Basis $e_1, \ldots, e_4$ und $C_4 = \{1, g, g^2, g^3\}$ die zyklische Gruppe der Ordnung 4 mit Erzeuger g.

a) Zeigen Sie, dass $\rho(g)e_i = e_{i+1}$, $i = 1, 2, 3$, $\rho(g)e_4 = e_1$ eine Darstellung $\rho\colon C_4 \to \mathrm{GL}(V)$ definiert.

b) Zerlegen Sie V in eine direkte Summe von irreduziblen Unterdarstellungen.

c) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\rho(g)A = A\rho(g)$ und finden Sie die Eigenwerte von A.

Aufgabe 3. Die alternierende Gruppe $A_4 = \{\sigma \in S_4 \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$ ist die Gruppe der geraden Permutationen von vier Elementen (diese Gruppe hat $|A_4| = 4!/2 = 12$ Elemente: die Identität, die zyklischen Permutationen von 3 Elementen (123), (124), (134), (234), ihre Inversen und die Transpositionen von disjunkten Paaren (12)(34), (13)(24), (14)(23)).

a) Sei $\rho\colon A_4 \to \mathrm{GL}(4,\mathbb{C})$ die durch $\rho(\sigma)(z_1,\dots,z_4)^T = (z_{\sigma^{-1}(1)},\dots,z_{\sigma^{-1}(4)})^T$, $\sigma \in A_4$, definierte Darstellung. Bestimmen Sie ihren Charakter χ_ρ.

b) Zeigen Sie, dass ρ einen eindimensionalen invarianten Unterraum hat.

c) Berechnen Sie $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|A_4|} \sum_{\sigma \in A_4} |\chi_\rho(\sigma)|^2$ und zeigen Sie, dass A_4 eine dreidimensionale irreduzible Darstellung hat.

d) Finden Sie die Dimensionen aller irreduziblen Darstellungen von A_4.

Aufgabe 4. Es bezeichne V_n, mit Basis $v_0,\dots,v_n$ gegeben durch $v_j = F^j v_0$ für $j = 1,\dots,n$, die $(n+1)$-dimensionale irreduzible Darstellung von $\mathfrak{su}(2)$.

a) Welche irreduziblen Darstellungen kommen in der Zerlegung von $V_1 \otimes V_1 \otimes V_1$ vor und mit welcher Vielfachheit?

Hinweis: Die Abbildung $u \otimes (v \oplus w) \mapsto (u \otimes v) \oplus (u \otimes w)$ definiert einen Isomorphismus von Darstellungen $U \otimes (V \oplus W) \to (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$ für alle $\mathfrak{su}(2)$-Darstellungen U, V, W.

b) Geben Sie eine Basis des zu V_3 äquivalenten invarianten Unterraums von $V_1 \otimes V_1 \otimes V_1$ an.

Aufgabe 5. Sei U die Menge der 3×3-Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{R})$, so dass $a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0$.

a) Zeigen Sie, dass U ausgestattet mit der Klammer $[A,B] = AB - BA$ eine Lie-Algebra ist.

b) Finden Sie eine Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$, deren Lie-Algebra U ist.