Prof. K. Nipp D-ITET, D-MATL, RW Winter 2014

Basisprüfung Lineare Algebra

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe) werden nicht akzeptiert!
- Tragen Sie die Lösung der Aufgabe 6 (Multiple Choice) auf dem Extrablatt ein.

Bitte wenden!

1. Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 1x_3 & - & ax_4 & = & -4 \\ 4x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & + & 2(2-a)x_4 & = & -6 \\ & & 1x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 4 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & 7x_3 & + & 2x_4 & = & -8 \end{array}$$

Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssytemes in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ an.

2. Die folgenden Punkte liegen annähernd auf einer Kurve mit der Gleichung $y(x) = a_0 + a_1(x-2)^3$, wobei a_0 und a_1 die unbekannten Parameter sind:

x_i	1	2	3
y_i	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{3}{8}$

a) Stellen Sie zu diesen Daten die Fehlergleichungen in der Form $Az - c = r$ auf und geben Sie die Matrix A und den Vektor c an.

b) Lösen Sie die Fehlergleichungen im Sinne kleinster Quadrate.

c) Welcher absolute Fehler ($|y(x_i) - y_i|$) wird an den jeweiligen Messpunkten x_i gemacht?

3. Sei $V = \mathcal{P}_2$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2.

Zudem sei die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}_2$ in sich gegeben:

$$p(x) \in \mathcal{P}_2 \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad q(x) = p(x) + p'(x) \in \mathcal{P}_2,$$

($p'(x)$ bedeutet die Ableitung von $p(x)$ nach x).

a) Zeigen Sie: $\mathcal{F}$ ist eine lineare Abbildung.

b) Gegeben sei im Urbildraum und im Bildraum die Basis $1,\ x,\ x^2$. Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

4. Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem erster Ordnung, $\dot{y} = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems mit der Anfangsbedingung $y(0) = (1,1,1)^T$ mit Hilfe der Transformationsmethode.

b) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \to +\infty$.

Siehe nächstes Blatt!

5. Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

d.h. bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten.

6. Multiple Choice:

a) Die folgenden Vektoren sind linear abhängig:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt Rang $A = 2$ genau dann wenn $\alpha = \frac{1}{2}$.

c) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt Bild $A = \{s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R}\}$, falls $\alpha = \frac{3}{2}$.

d) Die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sind:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -i.$$

e) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ähnlich zu einer Diagonalmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

f) Sei $\mathcal{P}_3$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3. Die Menge U definiert einen Unterraum von $\mathcal{P}_3$:

$$U = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(-t) = p(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$$

g) Die Lösung des folgenden Anfangswertproblemes

$$\dot{y}(t) = Ay(t)\,, \quad y(0) = y_0\,,$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

$$y(t) = (I + At + \frac{1}{2}A^2t^2) \cdot y_0.$$

h) Gegeben sei eine Matrix A mit Singulärwertzerlegung $A = USV^T$ mit

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Bildes von A^T gleich 2.

Viel Erfolg!