ETHZ, D-MAVT
Basisprüfung Lineare Algebra
Herbst 2006
Prof. K.Nipp

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nichtmotivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

—- • —-

1. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie Matrizen L, R, P, so dass gilt: $LR = PA$.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ in Abhängigkeit des Parameters α.

2. Gegeben sind 4 Punkte in der Ebene $P_i = (x_i, y_i),\ i = 1, 2, 3, 4$, wobei

x_i	0	$\pi/2$	π	$(3\pi)/2$
y_i	5.39	2.79	-0.61	2.43

a) Bestimmen Sie eine Funktion $y = f(x) = a\cos(x) + b$, so dass die Summe der Fehlerquadrate in y–Richtung

$$\sum_{i=1}^{4} [f(x_i) - y_i]^2$$

minimal wird.

b) Gegeben seien die Fehlergleichungen $Ax - c = r$. Angenommen, A und c seien in MATLAB eingegeben, mit welchen MATLAB-Statements können Sie x nach der Gauss'schen Methode der kleinsten Quadrate berechnen?
Geben Sie zwei verschiedene Lösungsarten an.

Bitte wenden!

3. Wählen Sie in Abhängigkeit von a je eine Basis von Bild$A$ und Kern$A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. **a)** Bestimmen Sie aus

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

eine orthonormale Basis $\left(e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\right)$, für die gilt:

- span $\left\{e^{(1)}\right\}$=span $\left\{v^{(1)}\right\}$
- span $\left\{e^{(1)}, e^{(2)}\right\}$=span $\left\{v^{(1)}, v^{(2)}\right\}$

b) Gegeben sei die Householder-Matrix $H = I_3 - 2uu^\top$, wobei $u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie $\|H\|_2$, $\|H\|_\infty$ und $\|H\|_1$.

5. Sei $x \in \mathbb{R}^3$ und sei $\mathcal{F}$ die folgende Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F} : x \longmapsto x' = Ax, \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie die Abbildung geometrisch, indem Sie das Eigenwertproblem von A lösen.

6. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit der Transformationsmethode.

b) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \longmapsto -\infty$.

Viel Erfolg!