Dr. V. Gradinaru
T. Welti

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 2

Aufgabe 2.1

Multiple Choice: Online abzugeben. Eventuell sind mehrere Antworten richtig.
Wir betrachten im Folgenden ein lineares Gleichungssystem mit m Zeilen, n Spalten und Rang r.

2.1a) Das Gleichungssystem ist *nicht* für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn

(i) $m > n$

(ii) $r < m$

2.1b) Ein homogenes Gleichungssystem hat genau dann *keine* nicht-trivialen Lösungen, wenn

(i) $r = m$

(ii) $r = n$

2.1c) Sei $m = n$. Das zugehörige homogene Gleichungssystem habe nicht-triviale Lösungen. Dann

(i) gibt es für beliebige rechte Seiten mindestens eine Lösung.

(ii) gibt es rechte Seiten, so dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Aufgabe 2.2

2.2a) Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & bx_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & & & 4x_3 & = & 5 \\ & & 2bx_2 & + & 2ax_3 & = & b \end{array}$$

Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

- Lösungen mit *zwei* freien Parametern besitzt,
- Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,
- eindeutig lösbar ist,
- keine Lösung hat.

Hinweis: Benutzen Sie den Gauss-Algorithmus und führen Sie dabei geeignete Fallunterscheidungen durch.

2.2b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & ax_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

eine nichttriviale Lösung (das heisst die Lösung ist ungleich Null)? Geben Sie für diesen Fall die Lösungsmenge an.

Aufgabe 2.3

Gegeben seien die zwei linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, mit

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit dem Gauss-Algorithmus die Lösungsmengen der beiden Gleichungssysteme.

Aufgabe 2.4

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

2.4a) Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden Matrixprodukte:

$AB,\ BA,\ Ax,\ A^2 := AA,\ B^2,\ BB^\top,\ B^\top B,\ y^\top x,\ yx,\ xy^\top,\ B^\top y,\ y^\top B.$

2.4b) Lösen Sie 2.4a) nochmals mit Hilfe von MATLAB.

2.4c) Gegeben seien die folgenden Matrizen und Vektoren

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

wobei $\phi = \pi/3$. Zeichnen Sie das Dreieck mit den Ecken a, b, c. Wenden Sie die Matrix R auf die Vektoren an und zeichnen Sie auch das entsprechende neue Dreieck. Was bedeutet das Anwenden von R geometrisch?

Hinweis: Ergänzen Sie dazu das Matlab-Skript `s2a4.m`, das Sie zusammen mit der MATLAB-Funktion `plot_dreieck.m` auf der Vorlesungshomepage finden.

Abgabe:

In der Woche vom 9. Oktober 2017 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten.