Dr. V. Gradinaru
T. Welti

Herbstsemester 2017

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 3

Aufgabe 3.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

3.1a) Ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit A orthogonal (d. h. $AA^T = A^T A = I_n$) ist für beliebige rechte Seiten b eindeutig lösbar.

(i) richtig (ii) falsch

3.1b) Die LR-Zerlegung (ohne Zeilenvertauschung) der Matrix $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 & 6 \\ 10 & 8 & 5 & 14 \\ 15 & 14 & 17 & 36 \end{bmatrix}$ liefert $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ und $R = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

(i) richtig (ii) falsch

3.1c) Die Inverse einer symmetrischen Matrix, falls sie existiert, ist symmetrisch.

(i) richtig (ii) falsch

3.1d) Eine $n \times n$-Matrix A ist nicht invertierbar genau dann, wenn das Gleichungssystem $Ax = b$ nicht für jedes b lösbar ist.

(i) richtig (ii) falsch

3.1e) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei nicht für jedes b lösbar. Dann hat das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ mindestens eine nicht-triviale Lösung.

(i) richtig (ii) falsch

Aufgabe 3.2

3.2a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ -6x_1 & + & 4x_2 & + & 14x_3 & = & -2 \end{array}$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung (mit Zeilenvertauschung).

3.2b) Lösen Sie das Gleichungssystem in Teilaufgabe 3.2a) nochmals mit Hilfe von MATLAB.

Aufgabe 3.3

3.3a) Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $(AB)^T$, $A^T B^T$ und $B^T A^T$.

3.3b) Zeigen Sie, dass für *beliebige* quadratische Matrizen C gilt, dass $C + C^T$ symmetrisch ist.

3.3c) Zeigen Sie, dass für *beliebige* Matrizen M gilt, dass $M^T M$ und $M M^T$ symmetrisch sind.

3.3d) Beweisen Sie Ihre Antwort in Aufgabe 3.1c).

Aufgabe 3.4

3.4a) Bestimmen Sie die 3×3-Matrizen, die beim Anwenden (von links) auf eine 3×3-Matrix A Folgendes bewirken:

(i) E_{21}: subtrahiert dreimal die erste Zeile von der zweiten;

(ii) E_{31}: addiert zweimal die erste Zeile zur dritten;

(iii) E_{32}: subtrahiert einmal die zweite Zeile von der dritten;

(iv) P: vertauscht die zweite und die dritte Zeile.

Hinweis: Wenn man eine Zeile von/zu einer anderen subtrahieren/addieren will, dann soll man nur einen Eintrag der Einheitsmatrix abändern. Zum Beispiel addiert die folgende Matrix E_{12} zweimal die zweite Zeile von A zur ersten Zeile hinzu

$$E_{12}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.4b) Seien A und R die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 14 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie Matrizen M_1, M_2 und M_3, so dass

$$M_1 M_2 M_3 A = R,$$

wobei M_1, M_2 und M_3 Matrizen aus Teilaufgabe 3.4a) sind.

Hinweis: Die Matrizen M_1, M_2 und M_3 kann man mit Hilfe des Gaussalgorithmus finden. Tatsächlich kann man jede Operation des Gaussalgorithmus als Matrixprodukt mit Matrizen wie denjenigen aus Teilaufgabe 3.4a) schreiben.

Abgabe:

In der Woche vom 16. Oktober 2017 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten.