Dr. V. Gradinaru
T. Welti

Herbstsemester 2017

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 4

Aufgabe 4.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

4.1a) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 5, \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 3, \\ 6x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 3. \end{array}$$

Führt man den ersten Gauss-Schritt mit Pivot in der Zeile 1 aus, so erhält man die folgende augmentierte Matrix:

(i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -3/4 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \end{array}\right)$

(ii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \end{array}\right)$

(iii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & -4 & -7 \end{array}\right)$

(iv) Keine der obigen drei Matrizen stellt die augmentierte Matrix nach dem ersten Gauss-Schritt dar.

4.1b) Jemand erhält als Resultat der Gausselimination die augmentierte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a(1-a) & b(1-a) \end{array}\right).$$

Wenn $b = 0$, dann hat das Gleichungssystem immer genau eine Lösung.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

Wenn $a \neq 0$, dann hat das Gleichungssystem immer genau eine Lösung.

(iii) Richtig.

(iv) Falsch.

Wenn $a = 2$ und $b = 1$, dann ist $(2.5, -0.5, -0.5)^\top$ die einzige Lösung.

(v) Richtig.

(vi) Falsch.

Wenn $a = 1$, dann ist die Lösungsmenge $\{(1, \lambda, -\lambda)^\top : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(vii) Richtig.

(viii) Falsch.

Aufgabe 4.2 Orthogonalität einer Matrix

Eine $n \times n$-Matrix Q heisst *orthogonal*, falls $QQ^T = Q^TQ = I_n$, wobei I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix ist.

4.2a) Sei $u = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right]^T$. Für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $V := I_2 - \alpha u\, u^T$ orthogonal?

4.2b) Lösen Sie für die in 4.2a) ermittelten Werte von α das Gleichungssystem

$$V\, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

ohne das Gauss'sche Eliminationsverfahren zu benützen.

4.2c) Kontrollieren Sie 4.2a) und 4.2b) mit MATLAB.

Aufgabe 4.3   Householdertransformation

Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene, die den Nullpunkt enthält. Man kann dann durch einen Normalenvektor v, der orthogonal zur Hyperebene Σ ist, die Spiegelung an der Hyperebene Σ beschreiben. Ist v als Spaltenvektor gegeben und I die n-dimensionale Einheitsmatrix, dann wird die entsprechende lineare Abbildung durch die folgende Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dargestellt:

$$H = I - \frac{2}{v^T v} v v^T.$$

4.3a) Beweisen Sie, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $(vv^T)^T = vv^T$.

4.3b) Beweisen Sie, dass H eine Orthogonalmatrix ist.

4.3c) Beweisen Sie, dass $H^2 = I$ gilt.

Abgabe:

In der Woche vom 23. Oktober 2017 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten.