Dr. V. Gradinaru
T. Welti

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 6

Aufgabe 6.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

6.1a) Gegeben seien:

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt:

(i) A_1 ist nicht orthogonal.

(ii) A_2 ist nicht orthogonal, aber die inverse A_2^{-1} ist es.

6.1b) Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $m > n$, so dass $A^T A$ die Einheitsmatrix I_n ist. Dann gilt:

(i) A ist orthogonal und $\|A\,x\| = \|x\|$ für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) A ist nicht orthogonal, aber trotzdem gilt $\|A\,x\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Sei B eine $n \times m$-Matrix, so dass BA orthogonal ist. Dann ist auch AB orthogonal.

Aufgabe 6.2

Gegeben sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

6.2a) Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung von A.

6.2b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe von Teilaufgabe 6.2a) für die rechte Seite

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 6.3

Gegeben sei eine orthogonale Matrix A. Geben Sie die Matrizen Q und R einer QR-Zerlegung von A an.

Aufgabe 6.4

Die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ kann entweder durch Drehung oder Spiegelung realisiert werden. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Berechnen Sie eine Drehmatrix Q_{21} und eine Spiegelungsmatrix H_1, so dass

$$Q_{21}A = R_1, \qquad H_1 A = R_2,$$

wobei R_1 und R_2 Rechtsdreiecksmatrizen sind. Geben Sie dann für $i = 1, 2$ eine orthogonale Matrix Q_i und eine Rechtsdreiecksmatrix R_i an, so dass $A = Q_i R_i$.

Aufgabe 6.5

Bestimmen Sie, ob $V = \mathbb{R}^3$, versehen mit der Standard-Skalarmultiplikation $\cdot$ und der Addition $\oplus$, ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wobei für zwei Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in V$ die Addition $x \oplus y$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 - y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in V.$$

Abgabe:

In der Woche vom 6. November 2017 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten.