

Serie 7

Aufgabe 7.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

7.1a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (i) Die Menge aller $n \times n$ -Matrizen bildet einen reellen Vektorraum.
- (ii) Die Menge aller regulären $n \times n$ -Matrizen bildet einen reellen Vektorraum.

7.1b) Die Menge $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ bildet einen Unterraum des \mathbb{R}^4 .

- (i) Richtig.
- (ii) Falsch.

7.1c) Die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bilden ein Erzeugendensystem vom \mathbb{R}^3 .

- (i) Richtig.
- (ii) Falsch.

7.1d) In welchen Fällen bilden die Vektoren keine Basis des \mathbb{R}^3 ?

- (i) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Aufgabe 7.2

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben durch

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{für } i = j \text{ oder } j = n, \\ a_{ij} = -1 & \text{für } i > j, \\ a_{ij} = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ durch $b = Ax$, wobei $x_i = (-1)^i$ für $i = 1, \dots, n$. Lösen Sie mithilfe von MATLAB das Gleichungssystem $Ax = b$ für $n = 10, 20, \dots, 1000$ jeweils einmal mit der LR-Zerlegung und einmal mit der QR-Zerlegung. Ploten Sie die jeweiligen relativen Fehler der beiden Methoden in der Euklidischen Norm, $\frac{\|x_{lu}(n) - x\|_2}{\|x\|_2}$ und $\frac{\|x_{qr}(n) - x\|_2}{\|x\|_2}$, in einem Bild.

Hinweis: Die Matrix A können Sie mithilfe des Befehls `tril` definieren. Verwenden Sie die Befehle `“lu(A, b)”` und `“qr(A, b)”` sowie `“\”`, um die Systeme zu lösen.

Aufgabe 7.3

7.3a) Sei V die folgende Teilmenge des \mathbb{R}^3 : $V = \{[x, y, 2x + y]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass V ein Unterraum des reellen Vektorraumes \mathbb{R}^3 ist.

7.3b) Ist die Menge $W = \{[x, 2x + 1, x]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ auch ein Unterraum von \mathbb{R}^3 ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7.4

Bestimmen Sie in den folgenden zwei Fällen, ob die Vektoren im \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^4 linear abhängig oder linear unabhängig sind. Geben Sie eine Begründung an.

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Aufgabe 7.5

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils den Kern der Matrizen und geben Sie jeweils auch eine Basis des Kerns an.

Aufgabe 7.6

Wir betrachten den linearen Raum $V := C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ über \mathbb{C} , d.h., den Raum aller stetigen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{C} . Für alle $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definieren wir

$$c_j(x) := \cos(jx), \quad s_j(x) := \sin(jx), \quad e_j(x) := \exp(ijx), \quad (7.6.1)$$

wobei hier $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit bezeichnet. Für $k \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig, sind die Unterräume

$$W_1 := \text{span}\{e_{-k}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_k\} \quad \text{und} \quad W_2 := \text{span}\{c_0, \dots, c_k, s_1, \dots, s_k\} \quad (7.6.2)$$

von V gegeben. Zeigen Sie, dass $W_1 = W_2$.

Hinweis: Es gilt $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$.

Abgabe:

In der Woche vom 13. November 2017 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten.