Dr. V. Gradinaru
T. Welti

Herbstsemester 2017

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 8

Aufgabe 8.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

8.1a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig. Dann hat das homogene Gleichungssystem
$$\lambda_1 a^{(1)} + ... + \lambda_n a^{(n)} = 0$$
nichttriviale Lösungen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.

(ii) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann muss gelten $k \leq n$.

(iii) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

(iv) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

(v) Die Vektoren eines Erzeugendensystems können linear abhängig sein.

(vi) Falls die Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ *keine* Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, dann müssen sie linear abhängig sein.

8.1b) In welchen Fällen bilden die Vektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

(i) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$

8.1c) In welchen Fällen bilden die Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(i) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$

Aufgabe 8.2

8.2a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^3$ und begründen Sie Ihre Antwort:
$$\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix}.$$

8.2b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} a \\ a \\ 1+a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ c \\ b+c \end{bmatrix}.$$

Diese Vektoren spannen einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ auf. Wie hängt die Dimension dieses Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

Aufgabe 8.3

Sei $\mathcal{P}_4$ der Raum der Polynome mit Grad strikt kleiner als 4. Die Monome 1, x, x^2, x^3 bilden eine Basis von $\mathcal{P}_4$, aber dies ist natürlich nicht die einzige Basis.
Die sogenannten Legendre-Polynome sind wie folgt definiert:

$$P_0(x) = 1, \quad P_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{dx^i}(x^2 - 1)^i \text{ für } i > 0.$$

Zeigen Sie, dass P_0, P_1, P_2, P_3 eine Basis von $\mathcal{P}_4$ bilden.

Aufgabe 8.4 Kern und Bild

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Bestimmen Sie Basen für $\mathrm{Kern}(A)$ und $\mathrm{Bild}(A)$.

Abgabe:

In der Woche vom 20. November 2017 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten.