Dr. V. Gradinaru
T. Welti

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 11

Aufgabe 11.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

11.1a) Sei die QR-Zerlegung der $m \times n$-Matrix A ($m > n$) gegeben mit Q orthogonal und $R = \left[\frac{R_0}{0}\right]$. Die Spalten von A seien linear abhängig. Dann ist die $n \times n$-Matrix R_0

(i) singulär.   (ii) regulär.

11.1b) Falls die Spaltenvektoren der Matrix der Fehlergleichungen linear unabhängig sind, so haben die Normalengleichungen

(i) genau eine Lösung.   (ii) unendlich viele Lösungen.   (iii) keine Lösung.

Gegeben sind die drei Punkte $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, in der Ebene mit

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 5.41 & 5.17 & 5.93 \end{array}.$$

Es soll mit Hilfe der Ausgleichsrechnung eine lineare Funktion $y = f(x) = ax + b$ gefunden werden, so dass die Summe der Fehlerquadrate in y–Richtung,

$$\sum_{i=1}^{3} [f(x_i) - y_i]^2,$$

minimal wird (lineare Regression).

11.1c) Die Matrix der Fehlergleichungen lautet:

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 5.41 \\ 1 & 5.17 \\ 2 & 5.93 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5.41 & 5.17 & 5.93 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

11.1d) Die Matrix der Normalengleichungen lautet:

(i) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 5 & 17.03 \\ 17.03 & 91.1619 \end{bmatrix}$

11.1e) Daraus ergibt sich für die Parameter der linearen Funktion:

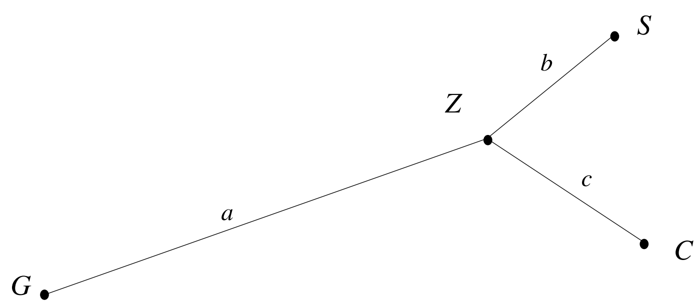
(i) $a = 0.27, b = 5.21\overline{2}$ (ii) $a = 0.26, b = 5.24\overline{3}$ (iii) $a = 0.15, b = 5.24\overline{7}$

wobei wir mit dem Überstrich die periodische Dezimalbruchdarstellung bezeichnen.

Aufgabe 11.2

Ein trainierter Velofahrer fährt innerhalb einer Woche zwischen den Städten Zürich (Z), Chur (C), St. Gallen (S) und Genf (G) immer auf denselben Wegen hin und her. Dabei radelt er stets über Zürich. Er liest auf seinem Velocomputer folgende Distanzen ab:

Z–G	S–G	G–C	C–S	Z–C
280	390	400	210	118



Es fällt ihm auf, dass die Strecke G–C nicht der Summe der Strecken Z–G und Z–C entspricht.

11.2a) Bestimmen Sie für ihn die ausgeglichenen Werte für die Längen a, b, c der Teilstrecken durch Lösen der Normalengleichungen.

11.2b) Bestimmen Sie a, b, c mit Hilfe der QR–Zerlegung in MATLAB.

11.2c) Lösen Sie diese Aufgabe nochmals mit dem '\'-Operator in MATLAB.

Aufgabe 11.3 Orthonormale Basis

Gegeben seien die Vektoren

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, das heisst, zeigen Sie, dass $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$

- Einheitsvektoren sind (das bedeutet, dass ihre Länge 1 ist, i.e. $\sqrt{\langle v^{(i)}, v^{(i)} \rangle} = 1$, $i = 1, 2, 3$),
- paarweise orthogonal sind
- und eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 11.4

Berechnen Sie die Determinante von

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Abgabe:

In der Woche vom 11. Dezember 2017 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten.

Freiwillige Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind vollkommen *freiwillig* zu lösen und sind *kein* direkter Prüfungsstoff. Sie sind ausschliesslich für diejenigen gedacht, die sich weitere und vor allem auch schwierigere Übungsaufgaben wünschen.

$\star$ Aufgabe 11.5 Matrixpotenzen

In der Vorlesung haben wir allgemein die Konzepte "lineare Unabhängigkeit" und "Basis" in Vektorräumen betrachtet. Die meisten Beispiele bezogen sich allerdings auf den $\mathbb{R}^n$. In dieser Aufgabe werden wir uns mit linear abhängigen Matrizen beschäftigen.

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

und Ihre Potenzen A^k, $k \in \mathbb{N}_0$, die das k-fache Produkt von A mit sich selbst bezeichnen. Es gilt die Konvention $A^0 := I_2$.

Wir definieren

$$M_k := \operatorname{span}\{A^0, A^1, \ldots, A^k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$B_k := \{A^0, A^1, \ldots, A^k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

11.5a) Mit welchem Argument kann man sofort und ohne Rechnung begründen, dass die Menge B_3 linear abhängig ist?

11.5b) Zeigen Sie, dass auch die Menge B_2 linear abhängig ist.

11.5c) Geben Sie eine Basis von M_2 an.

Hinweis: Verwenden Sie die Aussage, die in 11.5b) zu zeigen war.

11.5d) Was ist $\dim M_3$?

11.5e) Was ist die Dimension von M_k für beliebiges k?

$\star$ Aufgabe 11.6 Sherman-Morrison-Woodbury-Formel

In dieser Aufgabe üben wir die Anwendung des Matrixkalküls und das Rechnen mit Blockmatrizen im Zusammenhang mit einer wichtigen Formel für die Inverse von Matrizen, die durch die Modifikation einer invertierbaren Matrix durch ein Tensorprodukt (äusseres Produkt) hervorgeht.

Gegeben seien eine *invertierbare* Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, und zwei beliebige Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$, für die gelte

$$1 + v^T A^{-1} u \neq 0.$$

11.6a) Zeige Sie, dass

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u} .$$

Hinweis: Machen Sie sich zuerst klar, wie man nachweist, dass eine Matrix die Inverse einer anderen Matrix ist. Danach läuft die Lösung der Aufgabe auf ein ziemlich “mechanisches” Anwenden der Rechenregeln für das Matrixprodukt hinaus. Wichtig ist, dass man sieht, wann sich bestimmte Matrixprodukte auf blosse Zahlen reduzieren, denn dann lassen sie sich natürlich mit anderen Matrixprodukten vertauschen.

11.6b) Wir betrachten nun das folgende lineare Gleichungssystem in Blockmatrixform:

$$\begin{bmatrix} A & u \\ v^T & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.6.1}$$

Geben Sie die Matrixnotation eines linearen Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten an, das vom Vektor x aus der Lösung von (11.6.1) erfüllt wird.

Hinweis: Das logische Vorgehen ist natürlich die Elimination von ζ.

$\star$ Aufgabe 11.7 Rang-Eins Modifikation

In dieser Aufgabe sehen wir eine Möglichkeit, wie wir durch Rang-Eins-Matrizen modifizierte lineare Gleichungssysteme mit wenig Aufwand lösen können, sofern wir die Lösung der Originalgleichung kennen.

Wir betrachten eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für welche gilt $A = A^T$. Weiter nehmen wir einen Vektor $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und definieren die Matrizen $M_\pm := A \pm uu^T$.

11.7a) Wir nehmen an, dass $\operatorname{Rang} A = m \leq n$. Beweisen Sie, dass gilt $\operatorname{Rang} M_\pm \leq m + 1$.

Hinweis: Versuchen Sie zu verstehen, weshalb gilt

$$\operatorname{Bild}(M_\pm) \subseteq \operatorname{Bild}(A) + \operatorname{Bild}(uu^T) .$$

11.7b) Zeigen Sie, dass $M_\pm$ invertierbar ist, sofern gilt, dass A invertierbar ist und $u^TA^{-1}u \notin \{-1, 1\}$.

Hinweis: Die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel aus Aufgabe 11.6 könnte hier sehr hilfreich werden.

11.7c) Für gegebene Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ und rechte-Seite-Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ soll u so bestimmt werden, dass gilt

$$M_+x = b \quad \text{oder} \quad M_-x = b . \tag{11.7.1}$$

Hinweis:

(1) Machen Sie den Ansatz $r := Ax - b$ und betrachten Sie die Fälle

  (a) $r = 0$,
  (b) $r \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(2) Zeigen Sie im Fall (1b), dass für ein geeignetes $u \in \mathbb{R}^n$ gelten muss: $u \in \operatorname{span}\{r\}$. Machen Sie dann den Ansatz $u := \alpha r$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) Machen Sie bei der weiteren Rechnung im Fall (1b) eine weitere Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von $r^Tx \in \mathbb{R}$.

$\star$ Aufgabe 11.8 Cayley-Transformation von Matrizen

In dieser Aufgabe werden wir uns mit einer wichtigen Abbildung zwischen der Menge der schiefsymmetrischen Matrizen und der Menge der orthogonalen Matrizen befassen und üben dabei das Rechnen mit diesen speziellen Matrizen.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $M := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ A + I_n \text{ invertierbar}\}$ betrachten wir die Abbildung

$$\mathsf{C} : \begin{cases} M & \to & \mathbb{R}^{n\times n} \\ A & \mapsto & \mathsf{C}(A) := (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \end{cases} . \tag{11.8.1}$$

11.8a) Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in M$ gilt $\mathsf{C}(A) = 2(I_n + A)^{-1} - I_n$.

11.8b) Zeigen Sie, dass für jede schiefsymmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt, dass $x^T S x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Hinweis: Eine $n \times n$-Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst schiefsymmetrisch, wenn sie $S^T = -S$ erfüllt.

11.8c) Zeigen Sie, dass jede *schiefsymmetrische* Matrix S in M enthalten ist, also dass $I_n + S$ invertierbar ist, wenn $S^T = -S$.

Hinweis: Verwenden Sie die Äquivalenz i) $\Leftrightarrow$ iii) aus Satz 2.8 im Buch und die Aussage von Teilaufgabe 11.8b).

Hinweis: Diese Aufgabe lässt sich mit einem *Widerspruchsbeweis* lösen. Die Idee eines Widerspruchsbeweises ist die folgende:

Um eine Schlussfolgerung $A \Rightarrow B$ zu zeigen, macht man die Annahme, dass das *logische Gegenteil* von B gilt und gleichzeitig auch A. Dann schliesst man aus dieser Annahme eine offensichtlich falsche Aussage.

Überlegen Sie sich also zuerst, was in dieser Teilaufgabe die logischen Aussagen A und B sind und was das Gegenteil von B bedeutet.

11.8d) Zeigen Sie, dass

$$S \quad \text{schiefsymmetrisch} \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{C}(S) \quad \text{orthogonal.}$$

11.8e) Zeigen Sie, dass

$$Q \in M \quad \text{orthogonal} \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{C}(Q) \quad \text{schiefsymmetrisch.}$$

11.8f) Zeigen Sie, dass

$$\mathsf{C}(\mathsf{C}(S)) = S \quad \forall\, S \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ schiefsymmetrisch.}$$

Zusammen mit der Aussage von Teilaufgabe 11.8e) bedeutet das, dass C eine *bijektive* Abbildung zwischen den schiefsymmetrischen Matrizen und einer Teilmenge der orthogonalen Matrizen, nämlichen denen, die in M liegen, definiert.