Dr. V. Gradinaru
T. Welti

Herbstsemester 2017

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 12

Aufgabe 12.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

12.1a) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei nicht für beliebige rechte Seiten lösbar. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$, (ii) $\det A \neq 0$.

12.1b) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ habe nur die triviale Lösung. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$, (ii) $\det A \neq 0$.

12.1c) Sei M eine orthogonale Matrix. Daraus folgt

(i) $\det M \neq 0$, (ii) $\det M = 0$, (iii) $\det M = \pm 1$.

12.1d) Die LR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt $\det A = 60$.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

12.1e) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A im folgenden Gleichungssystem $Ax = b$:

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

(i) $\det A = -\frac{1}{\alpha+2}$, (ii) $\det A = \alpha + 2$, (iii) $\det A = -\alpha - 2$.

12.1f) Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystemes aus Aufgabe 12.1e)

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\,x_2 & = & 1 \end{array}$$

ist für $\alpha = -2$:

(i) die leere Menge,

(ii) $x_1 = -3/4, \quad x_2 = 5/4$,

(iii) $x_1 = t - 2, \quad x_2 = t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12.2

Die Runge-Funktion ist definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

Wir wollen diese Funktion auf dem Interval $[-5, 5]$ mit einem Polynom $P_n(x)$ von Grad n approximieren. Wir fordern, dass P_n die Funktion f an m gleichmässig in $[-5, 5]$ verteilten Punkten x_i möglichst gut approximiert und schreiben dies als lineares Ausgleichsproblem der Form

$$Ac = b, \tag{12.2.1}$$

wobei c die $n + 1$ Koeffizienten des Polynoms P_n sind.

12.2a) Bestimmen Sie die Matrix A und die rechte Seite b.

12.2b) Wie können Sie das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der QR-Zerlegung von A lösen? Beschreiben und begründen Sie das Vorgehen.

12.2c) Ergänzen Sie die MATLAB-Funktion `runge_lstsq.m`, die die Lösung des Ausgleichsproblems (12.2.1) für beliebige m und n mit $m \geq n + 1$ berechnet. Plotten Sie anschliessend mithilfe der Funktion `runge_diff_degrees.m` die Lösung für Grad $2 \leq n \leq 13$ und $m = 20$.

Aufgabe 12.3

12.3a) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix, das heisst, bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

12.3b) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

12.3c) Überprüfen Sie Ihr Resultat von Teilaufgaben 12.3a) und 12.3b) in MATLAB.

Hinweis: `[V,D] = eig(C)` gibt die Eigenwerte der Matrix `C` in der Diagonalen von `D` und zugehörige Eigenvektoren in den Spalten von `V` zurück.

Aufgabe 12.4

Sei A die 3×3-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

12.4a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A mit Hilfe der MATLAB Funktion `eig`.

12.4b) Lösen Sie mit MATLAB das Eigenwertproblem für A^{-1}, A^2 und A^3. Was stellen Sie fest?

12.4c) Beweisen Sie nun, dass für eine beliebige $n \times n$-Matrix M mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor x Folgendes gilt:

(i) λ^k ist ein Eigenwert von M^k ($k \in \mathbb{N}$) und x ein zugehöriger Eigenvektor.

(ii) Ist M invertierbar, so ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von M^{-1} und x ein zugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 12.5

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

12.5a) Diagonalisieren Sie die Matrix, das heisst, bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.

12.5b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, indem Sie die neuen Variablen $x(t) = T^{-1}y(t)$ einführen.

Hinweis: Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung der Form $\dot{z} = az$ ist gegeben durch $z(t) = ce^{at}$ mit einer Konstanten c. Zum Beispiel gilt für $a = -2$: Die Differentialgleichung $\dot{z} = -2z$ hat die Lösung $z(t) = ce^{-2t}$, wobei die Konstante c aus der Anfangsbedingung $z_0 = z(0) = c$ bestimmt werden kann.

12.5c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

12.5d) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \to +\infty$.

Abgabe:

In der Woche vom 18. Dezember 2017 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten.

Freiwillige Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind vollkommen *freiwillig* zu lösen und sind *kein* direkter Prüfungsstoff. Sie sind ausschliesslich für diejenigen gedacht, die sich weitere und vor allem auch schwierigere Übungsaufgaben wünschen.

⋆ Aufgabe 12.6 Lineare Regression in der Signalverarbeitung

Die lineare Ausgleichsrechnung spielt auch eine grosse Rolle in der modernen Signalverarbeitung, zum Beispiel, wenn es um das Ausmessen von Übertragungskanälen geht. Man erhält auf diese Weise etwa die Werte für die Gewichte in der Point-Spread-Function, die die Verzerrung von Pixelbildern in optischen Übertragungssystemen beschreibt. In dieser Aufgabe behandeln wir aber einen einfacheren, “eindimensionalen” Fall, nämlich die Störung eines zeitdiskreten Signals bei der Übertragung.

Wir betrachten ein zeitdiskretes Signal, welches gegeben ist durch die Folge von Werten $x_1, \ldots, x_m$, $m \in \mathbb{N}$, die die Signalamplituden zu festen Abtastzeitpunkten angeben. Diese Signale werden durch einen *linearen* Übertragungkanal (in Abbildung 12.1 mit einem blauen Pfeil symbolisiet) geschickt, wobei vorher und nachher “Funktstille” herrscht.

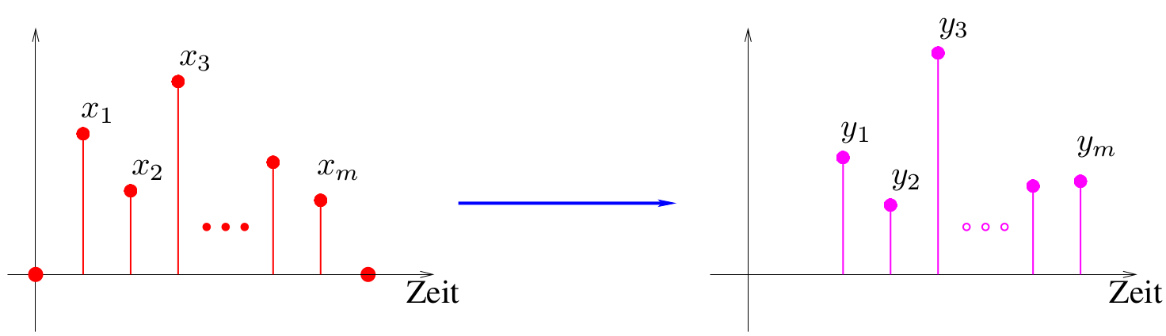

Abbildung 12.1: Übertragungskanal und zeitdiskrete Signale auf Senderseite (links) und Empfängerseite (rechts)

Leider ist der Kanal nicht perfekt, so dass sich zeitlich benachbarte Signalwerte gegenseitig beeinflussen, ein Phänomen, das man als Übersprechen bezeichnet. Daher besteht das am anderen Ende des Kanals empfangene Signal aus einer anderen Folge von Werten $y_1, \ldots, y_m$.

Der Zusammenhang zwischen dem empfangenen und gesendeten Signal ist näherungsweise gegeben durch

$$y_i = \beta x_{i-1} + \alpha x_i + \beta x_{i+1}\,, \quad i = 1, \ldots, m\,, \tag{12.6.1}$$

wobei wir annehmen, dass gilt $x_0 = x_{m+1} = 0$.

Die Aufgabe besteht nun darin, die unbekannten Übersprechparameter α und β aus den *gemessenen* Signalen zu ermitteln und zwar durch Lösen eines überbestimmten linearen Gleichungssystems mit der Methode der kleinsten Quadrate aus der Vorlesung.

12.6a) Stellen Sie das überbestimmte lineare Gleichungssystem für das Schätzproblem auf.

Hinweis: Die Herausforderung besteht darin, die Koeffizientenmatrix A, die Unbekannten x und die rechte Seite b aus (12.6.1) richtig zu identifizieren. Dabei ist Vorsicht geboten, denn die Notation in (12.6.1) kann leicht in die Irre führen; die x_i sind keine Unbekannten!

12.6b) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [beta, alpha] = CrosstalkChannel(x, y),
```

welche für die Eingabedaten $x_1, \ldots, x_m$ und $y_1, \ldots, y_m$, repräsentiert durch die Spaltenvektoren `x` und `y`, die Werte für α und β aus (12.6.1) im Sinne der kleinsten Quadrate bestimmt.

12.6c) Geben Sie die Normalengleichungen für das überbestimmte lineare Gleichungssystem aus Teilaufgabe 12.6a) an.

12.6d) Für welche Signale $x_1, x_2, \ldots, x_m$ können wir keine eindeutige Kleinste-Quadrate-Lösung erwarten? Hier geben theoretische Resultate aus der linearen Algebra dem Ingenieur Hinweise darauf, wie der die Messung durchzuführen hat.

Hinweis: Erinnern Sie sich an eine Bedingung an die Systemmatrix, die die Eindeutigkeit der Kleinste-Quadrate-Lösung sicherstellt.

Überlegen Sie sich dann, wann die Matrix des überbestimmten Gleichungssystems aus Teilaufgabe 12.6a) keinen vollen Spaltenrang hat. Dies führt auf ein Eigenwertproblem.

Um Eigenvektoren zu finden, probieren Sie schliesslich Eingangssignale der Form

$$x^\ell = (x_j^\ell)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m \,, \quad \ell \in \{1, \ldots, m\} \quad \text{mit} \quad x_j^\ell := \sin\left(\pi \frac{j\ell}{m+1}\right) \,, \quad j = 1, \ldots, m \,.$$

⋆ Aufgabe 12.7 Lineare Rekursion: Das Räuber-Beute-Modell

Eine Anwendung linearer Rekursionen ist die Vorhersage der dynamischen Entwicklung der Altersstruktur einer Population. Darüber hinaus sind lineare Rekursionen sehr wichtig für die mathematische Modellierung von Populationsdynamik, denn die natürlichen Rhythmen von Tag und Nacht und Jahreszeiten legen eine Entwicklung in Zeitschritten nahe.

Um qualitative und quantitative Vorhersagen aus solchen Modellen zu treffen, ist die Diagonalisierung der Rekursionsmatrix das entscheidende Hilfsmittel. Dieses Werkzeug stellt die lineare Algebra bereit.

Wir betrachten ein zeitdiskretes Räuber-Beute-Modell, welches repräsentiert wird durch die parameterabhängigen Rekursionsgleichungen

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= \frac{3}{5} p_k + \frac{1}{5} q_k \,, \\ q_{k+1} &= -\alpha p_k + \frac{6}{5} q_k \,, \end{aligned} \quad k \in \mathbb{N}_0 \,, \tag{12.7.1}$$

wobei p_k die Population der Räuber und q_k die Population der Beute zum Zeitpunkt t_k darstellt, und in Abhängigkeit vom reellen Parameter $\alpha \in [0, 1]$. Offensichtlich impliziert das Modell (12.7.1)

- ein exponentielles Wachstum der Beutepopulation, wenn keine Räuber vorhanden sind (Koeffizient $\frac{6}{5}$),
- eine exponentielle Abnahme der Räuberpopulation, falls es keine Beutetiere gibt (Koeffizient $\frac{3}{5}$),
- ein reduziertes Wachstum oder sogar ein Schrumpfen der Beutepopulation in Gegenwart von vielen Räubern (Koeffizient $-\alpha$),

- eine weniger starke Abnahme oder sogar eine Zunahme der Räuberpopopulation, wenn viele Beutetiere vorhanden sind (Koeffizient $\frac{3}{5}$).

Zum Zeitpunkt t_0 seien die Anfangswerte gegeben durch $(p_0, q_0) \in \mathbb{R}^2$.

12.7a) Stellen Sie das Räuber-Beute Modell in der Form einer linearen Rekursion gemäss

$$x^{k+1} = Ax^k \tag{12.7.2}$$

dar, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $x^k \in \mathbb{R}^2$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

12.7b) Für welche(n) Wert(e) von α gibt es $\left[\begin{smallmatrix} p_0 \\ q_0 \end{smallmatrix}\right] \neq 0$ so, dass $p_k = p_0$ und $q_k = q_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$?

Hinweis: Natürlich muss man nur herausfinden, wann $p_1 = p_0$ und $q_1 = q_0$. Die Berechnung von Eigenwerten ist für diese Teilaufgabe nicht notwendig.

12.7c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in [0, \frac{9}{20})$.

12.7d) Analysieren Sie das Verhalten von (p_k, q_k) für $t_k \to \infty$ in Abhängigkeit des reellen Parameters $\alpha > 0$. Für welche Werte von $\alpha > 0$ gilt $p_k^2 + q_k^2 < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle Startwerte $(p_0, q_0) \in \mathbb{R}^2$?

Hinweis: Man hat die Beträge aller Eigenwerte der Rekursionsmatrix in Abhängigkeit vom Parameter zu inspizieren.

12.7e) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [p,q] = raeuber_beute_modell( alpha ),
```

welche einen konkreten reellen Wert $\alpha > 0$ als Eingabe nimmt und das Verhalten des Räuber-Beute Modells über eine lange Zeitdauer $[0, t_{100}]$ *simuliert*, wobei $t_k = 0.1 \cdot k$. Als Startwerte wählen wir $x^0 = \begin{bmatrix} 300 \\ 600 \end{bmatrix}$. Die Funktion soll die Werte für p_k, q_k über diesen Zeitraum plotten und $x^{100} = \left[\begin{smallmatrix} p^{100} \\ q^{100} \end{smallmatrix}\right]$ zurückgeben. Überprüfen Sie so Ihre Berechnungen in Teilaufgabe 12.7d).

⋆ Aufgabe 12.8 Die Spur diagonalisierbarer Matrizen

In dieser Aufgabe lernen wir eine spezielle Funktion auf dem Raum der quadratischen Matrizen kennen, die *Spur*. Sie steht in enger Beziehung zum Spektrum einer Matrix.

Die Spur einer quadratischen Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert als

$$\operatorname{Spur} M := \sum_{j=1}^{n} (M)_{j,j} \,. \tag{12.8.1}$$

12.8a) Bestimmen Sie die Dimension des Unterraums

$$U := \left\{ M \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, \operatorname{Spur} M = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n} \,.$$

Hinweis: Sie können U als Kern einer “Matrix” charakterisieren. Dann sieht man, dass diese Matrix nur ein Zeilenvektor ist.

12.8b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\operatorname{Spur} BC = \operatorname{Spur} CB\,, \quad \forall\, B,\, C \in \mathbb{R}^{n\times n}\,. \tag{12.8.2}$$

12.8c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar, mit

$$A = S\,\underbrace{\operatorname{diag}(\lambda_1,\, \dots,\, \lambda_n)}_{=:D}\,S^{-1}\,, \tag{12.8.3}$$

wobei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass gilt

$$\operatorname{Spur} A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\,. \tag{12.8.4}$$

Bemerkung: Die Identität (12.8.4) bietet ein nützliches Hilfsmittel zur Überprüfung der Korrektheit von berechneten Eigenwerten.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe 12.8b).

☆ Aufgabe 12.9 Fourier-Matrizen

Die Tatsache, dass selbst reelle Polynome komplexe Nullstellen haben können, zwingt uns dazu, im Zusammenhang mit der Diagonalisierung von Matrizen in $\mathbb{C}$ zu rechnen. Das ist auch einer der tieferen Gründe für die grosse Bedeutung komplexer Zahlen in Wissenschaft und Technik. Machen Sie also nicht Ihren Mathematikprofessor dafür verantwortlich, dass Sie sich mit komplexen Zahlen herumschlagen müssen, sondern die Weigerung mancher reeller Polynome, ausschliesslich reelle Nullstellen zu haben.

Eine sehr wichtige Familie komplexer Matrizen sind die *Fouriermatrizen* $F_n = (F^n_{kl})^n_{k,l=1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$F^n_{kl} := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(k-1)(l-1)\right)\,, \quad 1 \le k, l \le n\,.$$

Dabei bezeichnet $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit ($i^2 = -1$).

12.9a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$F_n^H F_n = n \cdot I_n\,,$$

wobei das hochgestellte H die komplex konjugierte Transponierte einer Matrix bezeichnet (die *hermitesch Transponierte*).

Hinweis: Aus der Analysis sollten die folgenden Rechenregeln für die komplexe Exponentialfunktion bekannt sein:

$$\begin{aligned} \exp(2\pi i k) &= 1 \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{Z}\,, \\ \exp(kz) &= (\exp(z))^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{C}\,, \\ \overline{\exp(z)} &= \exp(\overline{z}) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\,. \end{aligned}$$

Erinnern Sie sich ausserdem an die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{für alle } q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

12.9b) Mit welcher komplexen Zahl muss man F_n multiplizieren, um eine *unitäre* Matrix zu erhalten?

12.9c) Es bezeichne $e^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ den k-ten Einheitsvektor. Die *zyklische Permutationsmatrix* $P_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert durch

$$P_n = [e^{(2)}, e^{(3)}, \ldots, e^{(n-1)}, e^{(n)}, e^{(1)}] \; .$$

Zeigen Sie, dass diese Matrix durch die Fouriermatrix diagonalisiert wird, dass es also eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ so gibt, dass

$$P_n F_n = F_n D \; .$$

Bestimmen Sie auch die Diagonaleinträge von D.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass $AS = SD$, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, genau dann wenn die Spalten s^l, $l = 1, \ldots, n$, von S erfüllen, dass

$$As^l = \lambda_l s^l \; , \quad l = 1, \ldots, n \; .$$

⋆ Aufgabe 12.10 Orthogonalität von Eigenvektoren normaler Matrizen

Satz 7.4 im Buch garantiert die lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, die zu *verschiedenen Eigenwerten* von A gehören. Für eine spezielle Klasse von Matrizen, nämlich die *normalen* Matrizen, kann man eine viel stärkere Aussage einfach beweisen, nämlich den folgenden Satz:

Satz. Erfüllt die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Bedingung

$$AA^H = A^H A \; , \tag{12.10.1}$$

ist sie also vertauschbar mit ihrer konjugiert Transponierten A^H, so sind jeweils zwei Eigenvektoren, die zu *verschiedenen* Eigenwerten gehören, *orthogonal*.

Beachten Sie, dass wir in dieser Aufgabe konsequent mit komplexen Matrizen und Vektoren rechnen.

12.10a) Zeigen Sie, dass für eine Matrix, die (12.10.1) erfüllt, gilt:

$$\operatorname{Kern}(A) = \operatorname{Kern}(A^H) \; .$$

Hinweis: Verwenden Sie die Rechenregeln für das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$.

12.10b) Zeigen Sie, dass aus der Eigenschaft (12.10.1) der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ folgt:

$$(A - \lambda I_n)(A - \lambda I_n)^H = (A - \lambda I_n)^H (A - \lambda I_n) \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{C} \; .$$

Hinweis: Für komplexe Matrizen gelten die gleichen Rechenregeln wie für reelle Matrizen.

12.10c) Beweisen Sie, dass jeder Eigenvektor von A auch ein Eigenvektor von A^H ist und umgekehrt.

Hinweis: Aus der Definition von Eigenvektoren wissen wir, dass sie Elemente des Kerns von bestimmten Matrizen sind. Diese Matrizen sind uns bereits in der vorherigen Teilaufgabe begegnet. Geht Ihnen ein Licht auf? Teilaufgabe 12.10a)!

12.10d) Beweisen Sie nun den obigen Satz unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe 12.10c).

Hinweis: Orthogonalität von zwei Eigenvektoren v_1 und v_2 zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 bedeutet: $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. Wir wissen $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Es genügt also, $\lambda_1\langle v_1, v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle$ zu zeigen.