Dr. V. Gradinaru
T. Welti

Herbstsemester 2017

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 13

Aufgabe 13.1

13.1a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

13.1b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu C.

13.1c) Berechnen Sie die Matrix

$$e^C = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} C^n.$$

13.1d) Prüfen Sie Teilaufgaben 13.1b) und 13.1c) mit MATLAB nach.

Hinweis: Beachten Sie den Unterschied zwischen den Funktionen `exp` und `expm`.

Aufgabe 13.2

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A symmetrisch positiv definit ist.

Aufgabe 13.3

13.3a) Für $\phi \in [0, 2\pi]$ seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie jeweils eine Singulärwertzerlegung von A, B und C.

13.3b) Lösen Sie Teilaufgabe 13.3a) für $\phi = \frac{\pi}{4}$ mit MATLAB.

Hinweis: Um eine Singulärwertzerlegung zu berechnen, kann man die Funktion `svd` benutzen.

Aufgabe 13.4

13.4a) Lösen Sie das Ausgleichungsproblem

$$Ac = b,$$

für

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

mit Hilfe der Singulärwertzerlegung.

Hinweis: Betrachten Sie für die Singulärwertzerlegung hier hauptsächlich das Eigenwertproblem zu AA^T (und nicht zu $A^T A$), um die Berechnungen zu vereinfachen.

13.4b) Lösen Sie Teilaufgabe 13.4a) mit MATLAB.

Aufgabe 13.5

Für welche $s, t \in \mathbb{R}$ sind folgende Matrizen positiv definit?

$$\begin{bmatrix} s & -4 & -4 \\ -4 & s & -4 \\ -4 & -4 & s \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} t & 3 & 0 \\ 3 & t & 4 \\ 0 & 4 & t \end{bmatrix}$$

Hinweis: Es ist hinreichend, dass alle Eigenwerte positiv sind (wieso?). Die Nullstellen von $x^3 - 48x - 128$ sind $\{8, -4\}$.

Aufgabe 13.6

Zeichnen Sie die Ellipse in $\mathbb{R}^2$, die mit der Gleichung $x^2 + xy + y^2 = 1$ bestimmt ist. Finden Sie die dazu gehörenden Halbachsen.

Abgabe:

Diese Serie ist nicht mehr abzugeben und die Lösung wird direkt am Ende des Semesters veröffentlicht. Es wird trotzdem stark empfohlen, die Serie selbstständig zu bearbeiten. Bei Fragen zur Lösung bitten wir Sie, in den Übungsstunden oder (wie immer) im StudyCenter nachzufragen.

Freiwillige Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind vollkommen *freiwillig* zu lösen und sind *kein* direkter Prüfungsstoff. Sie sind ausschliesslich für diejenigen gedacht, die sich weitere und vor allem auch schwierigere Übungsaufgaben wünschen.

⋆ Aufgabe 13.7 Fibonacci-Zahlen

Angeregt durch die berühmte Kaninchenaufgabe von Leonardo von Pisa (1170–1250), genannt Fibonacci, befassen wir uns mit der vorliegenden Aufgabe.

Annahme: Neugeborene Kaninchenpaare bringen nach dem ersten und dem zweiten Monat ihres Lebens jeweils ein neues Kaninchenpaar zur Welt und stellen dann die weitere Fortpflanzung ein.

Sei x_n die Anzahl der im Monat n neugeborenen Kaninchenpaare, wobei wir $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ setzen. Nach obiger Annahme bringen im Monat n die im Monat $n-1$ und Monat $n-2$ neugeborenen Kaninchenpaare je ein neues Kaninchenpaar zur Welt. Die Anzahl der neugeborenen Kaninchenpaare im Monat n ist also die Summe der Anzahl der neugeborenen Kaninchenpaare in den Monaten $n-1$ und $n-2$. Die Folge $x_n, n \in \mathbb{N}_0$, erfüllt also

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1$$

sowie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Rekursion

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \tag{13.7.1}$$

und entspricht somit der berühmten Folge der Fibonacci-Zahlen. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, wie es mithilfe der linearen Algebra möglich ist, eine explizite Formel für die n-te Fibonaccizahl anstelle der Rekursion (13.7.1) herzuleiten.

13.7a) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, welche die Gleichung

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Wie hängt $\left[\begin{smallmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{smallmatrix}\right]$ von $\left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ x_1 \end{smallmatrix}\right]$ ab? Finden Sie einen Ausdruck in Abhängigkeit von A.

Die Idee ist nun, beliebige Anfangsbedingungen

$$0 \neq z = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

zu betrachten und ein solches $z \neq 0$ zu suchen, für welches man $A^n z$ einfach berechnen kann.

13.7b) Am einfachsten wäre $A^n z$ zu berechnen, wenn $Az = z$ gilt, denn dann ist $A^n z = z$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $Az = z$ ein lineares Gleichungssystem ist, welches nur die Lösung $z = 0$ besitzt.

13.7c) Ebenfalls lässt sich $A^n z$ einfach berechnen, falls $Az = \lambda z$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Was ist dann $A^n z$?

13.7d) Finden Sie zwei Werte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so dass das lineare Gleichungssystem $Az = \lambda z$ Lösungen $z \neq 0$ hat.

13.7e) Finden Sie zu den in 13.7d) gefundenen Werten λ_1, λ_2 je auch ein $z^{(1)}, z^{(2)} \neq 0$, mit

$$Az^{(i)} = \lambda_i z^{(i)}, \quad i = 1, 2.$$

13.7f) Verwenden Sie nun die vorherigen Teilaufgaben, um für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ eine explizite Formel für den Vektor $\left[\begin{smallmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{smallmatrix}\right]$ herzuleiten.

13.7g) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

⋆ Aufgabe 13.8 Anwendungen von Diagonalisierbarkeit

Diese Aufgabe soll aufzeigen, wie die Diagonalisierbarkeit einer Matrix verwendet werden kann, um zum Beispiel ihr Matrixexponential zu berechnen. Für eine diagonalisierbare Matrix

$$A = S \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

und eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit konvergenter Taylorreihe (insbesondere zum Beispiel Polynome oder die Exponentialfunktion) gilt die Beziehung

$$f(A) = S \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) S^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Im Folgenden betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

13.8a) Überprüfen Sie, dass A die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 8$ hat und die entsprechenden Eigenräume durch

$$E_2 = \operatorname{Kern}(A - 2\cdot I_3) = \operatorname{span}\left\{ \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \right\}, \quad E_8 = \operatorname{Kern}(A - 8\cdot I_3) = \operatorname{span}\left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \right\}$$

gegeben sind.

13.8b) Berechnen Sie das Matrixexponential $e^A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von A.

13.8c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_A von A und berechnen Sie $p_A(A)$. Geben Sie eine Erklärung für das Ergebnis an.

Bemerkung: Die Beobachtung, die Sie hier machen, gilt für beliebige (auch nicht diagonalisierbare) quadratische Matrizen.

13.8d) Berechnen Sie mithilfe von Teilaufgabe 13.8c) die Inverse A^{-1} von A.

13.8e) Berechnen Sie für einen Paramter $x \in \mathbb{C}$ die Inverse der Matrix

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4},$$

indem Sie verwenden, dass der Ausruck für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} y^n = (1-y)^{-1}$ (wobei $y \in \mathbb{C}$ mit $|y| < 1$) für zulässige Matrixargumente auch gilt.

Hinweis: Schreiben Sie X als $X = I_4 - Y$ für ein $Y \in \mathbb{C}^{4\times 4}$, berechnen Sie Potenzen von Y und verwenden Sie, dass Y ein zulässiges Argument für die geometrische Reihe ist.

⋆ Aufgabe 13.9 Lösung einer linearen Differentialgleichung

Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{y}_1(t) = -2y_1(t) + y_2(t),$$
$$\dot{y}_2(t) = y_1(t) - \frac{1}{2}y_2(t).$$

13.9a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T$ des Systems.

13.9b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangswertbedingung

$$y_1(0) = y_2(0) = 1\,.$$

13.9c) Skizzieren Sie den Verlauf der entsprechenden Lösung in der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$, das heisst, die Bildmenge der Abbildung

$$\begin{aligned}[0,\infty) &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto y(t)\,.\end{aligned}$$

⋆ Aufgabe 13.10 Zusammenhang zwischen dem charakteristischen Polynom für Differentialgleichungen und demjenigen für Matrizen

In der Analysisvorlesung haben Sie womöglich Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten kennengelernt:

$$f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0\,, \quad a_k \in \mathbb{R}\,, \quad k = 1,\ldots,n\,, \tag{13.10.1}$$

wobei $f^{(k)}(x)$ für die k-te Ableitung der Funktion f nach x steht. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung kann bestimmt werden, indem zunächst die Nullstellen des sogenannten *charakteristischen Polynoms*

$$Q(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \tag{13.10.2}$$

bestimmt werden. Warum heisst dieses Q ebenfalls "charakteristisches Polynom", genauso wie das in der Vorlesung eingeführte Polynom, als dessen Nullstellen man die Eigenwerte einer Matrix erhält? Das ist kein Zufall und soll in dieser Aufgabe beleuchtet werden.

13.10a) Wir wandeln die Differentialgleichung (13.10.1) um in eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, indem wir den Hilfsvektor

$$y(x) := \begin{bmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

einführen. Zeigen Sie, dass, wenn f die Gleichung (13.10.1) löst, dann gilt

$$y'(x) = A_n y \quad \text{mit} \quad A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}\,. \tag{13.10.3}$$

Hinweis: Lösen Sie (13.10.1) nach $f^{(n)}(x)$ auf.

13.10b) Nun wollen wir das charakteristische Polynom der Matrix A aus (13.10.3) bestimmen. Angesichts der fürchterlich komplizierten Determinantenformeln für eine allegemeine $n \times n$-Matrix erscheint das aussichtslos. Das ist es aber nicht, denn die Invarianz der Determinante bei Spaltenumformungen erlaubt es, die Matrix sukzessive zu vereinfachen, ohne Ihre Determinante zu ändern. Wir machen uns das zuerst an einem kleinen 3×3-Beispiel klar.

Zeigen Sie, dass folgende Gleichungen gelten und bestimmen Sie dann mit Hilfe der Formel für die Determinante einer Dreiecksmatrix den Wert:

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2-\lambda \end{bmatrix}\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1-\frac{a_0}{\lambda} & -a_2-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -a_0 & -a_1-\frac{a_0}{\lambda} & -\lambda-a_2-\frac{a_1}{\lambda}-\frac{a_0}{\lambda^2} \end{bmatrix}\right)\end{aligned} \tag{13.10.4}$$

Hinweis: Welche Spaltenumformungen transformieren die Matrizen ineinander?

13.10c) Was ist also das charakteristische Polynom von A_3?

13.10d) Nun wenden Sie die analogen Spaltenumformungen, wie in der vorhergehenden Teilaufgabe 13.10b), auf die Matrix A_n an. Natürlich braucht man nun $n-1$ solche Spaltenumformungen, die von links nach rechts fortschreitend jeweils zwei benachbarte Spalten der Matrix geeignet kombinieren. Welche untere Dreiecksmatrix erhalten Sie?

13.10e) Berechnen Sie nun das charakteristische Polynom $p_{A_n}(\lambda)$. Was liefert der Vergleich mit Q aus (13.10.2)?