D-ITET. D-MATL, RW | Lineare Algebra | HS 2017
Dr. V. Gradinaru
T. Welti

Online-Test 1

Einsendeschluss: Montag, den 27.11.2017 10:00 Uhr

Dieser Test dient, seriös bearbeitet, als Repetition des bisherigen Vorlesungsstoffes und als Übung für die Prüfung. Es werden auch Lösungen veröffentlicht werden.

---

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 8 & 8 \\ -2 & 0 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Der Rang der Matrix A ist:

(a) 2

(b) 3

(c) 4

2. Gegeben sei die $m \times n$-Matrix A, wobei $\text{Rang}(A) = m \leq n$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.

(b) $Ax = b$ hat für jede b mindestens eine Lösung.

(c) Falls $m = n$, hat $Ax = b$ für jede b eine eindeutige Lösung.

(d) Falls $m = n$, gibt es $x \neq 0$, so dass $Ax = 0$.

3. Gegeben seien die orthogonale Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

und der Vektor

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ist

(a) $x = \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}^T$.

(b) $x = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}^T$.

(c) $x = \begin{bmatrix} 5/\sqrt{3} & -2\sqrt{2} & \sqrt{6}/3 \end{bmatrix}^T$.

(d) $x = \begin{bmatrix} 7/\sqrt{3} & -\sqrt{2} & -\sqrt{6}/3 \end{bmatrix}^T$.

4. Wir betrachten drei $n \times n$-Matrizen A, B und C, so dass $AB = AC = I_n$. Dann gilt $B = C$.

(a) Richtig

(b) Falsch

5. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) Die Matrix A ist nicht invertierbar.

6. Für einen Vektor x definieren wir seine euklidische Norm als $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$. Für eine orthogonale $n \times n$-Matrix Q gilt $\|x\|_2 = \|Qx\|_2$ für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Richtig

(b) Falsch

7. Wir betrachten n linear unabhängige Vektoren $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ und die Matrix $A := \left[\, a^{(1)} \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; a^{(n)} \,\right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist A invertierbar.

(a) Richtig

(b) Falsch

8. Welche der folgenden Lösungsmengen sind Unterräume von $\mathbb{R}^3$?

(a) $L_1 = \left\{ [x, 2x + y, y - 2]^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $L_2 = \left\{ [x, 0, y]^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $L_3 = \left\{ 0 = [0, 0, 0]^T \in \mathbb{R}^3 \right\}$

9. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

und die Menge $L = \left\{ Ax \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

(a) L ist ein Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^2$.

(b) L ist ein Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^3$.

(c) Die Vektoren $b^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $b^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ und $b^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}^T$ bilden ein Erzeugendensystem von L.

(d) Die Vektoren $a^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$ und $a^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T$ bilden ein Erzeugendensystem von L.

10. Für $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $u \in \mathbb{R}^2$ mit $u^T u = 1$ betrachten wir die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}, \qquad B = I_2 - 2uu^T.$$

Welche der folgenden Aussagen ist/sind korrekt?

(a) A ist orthogonal, nicht aber B.

(b) B ist orthogonal, nicht aber A.

(c) A und B sind orthogonal.

(d) AB ist orthogonal.