Online-Test 2

Einsendeschluss: Sonntag, den 31.12.2017 20:00 Uhr

Dieser Test dient, seriös bearbeitet, als Repetition des bisherigen Vorlesungsstoffes und als Übung für die Prüfung. Es werden auch Lösungen veröffentlicht werden.

---

1. Lösen Sie von Hand folgendes Ausgleichsproblem mit der QR-Zerlegung:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 1 & = & r_1 \\ & & x_2 & - & 3 & = & r_2 \\ & & x_2 & - & 4 & = & r_3. \end{array}$$

Schreiben Sie dazu das Problem in der Form $Ax - c = r$, bestimmen Sie die QR-Zerlegung $A = QR$ mit Hilfe einer geeigneten Givens-Rotation sowie den Vektor $d = Q^T c$, und bestimmen Sie schliesslich die Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ des Ausgleichsproblems. Welche der folgenden Antworten ist korrekt?

(a) $x = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$,

(b) $x = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

(c) $x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}$,

(d) $x = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

2. Ist A eine diagonalisierbare Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, so gilt

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Dann sind alle Eigenwerte von A reell.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. Es gibt orthogonale Matrizen, die singulär sind.

(a) Richtig (b) Falsch

5. Ist x ein Eigenvektor von A, dann ist x auch ein Eigenvektor von A^2.

(a) Richtig. (b) Falsch.

6. Welche der folgenden Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

sind diagonalisierbar?

(a) A_1 (c) A_3

(b) A_2 (d) Keine.

7. Gegeben seien die Fehlergleichungen

$$Ax - c = r$$

mit

$$A \in \mathbb{R}^{4\times 3}, \ \operatorname{Rang} A = 2.$$

Dann haben die Normalgleichungen

$$A^T A x = A^T c$$

eine eindeutige Lösung.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

8. Ein Vektor habe bezüglich der Basis $B := \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ den Koordinatenvektor $[-1, 2]^T$. Der Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis ist:

(a) $[\frac{3}{2}, 0]^T$ (c) $[0, -5]^T$

(b) $[-1, 2]^T$ (d) $[-2, 0]^T$

9. Wir betrachten eine Singulärwertzerlegung $A = USV^T$ der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix S ist dann gegeben durch:

(a) $S = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

(b) $S = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

(c) $S = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$,

(d) $S = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10. Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt und 2-Norm. Es sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Für alle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle x, A^T y \rangle = \langle Ax, y \rangle$.

(b) Wenn $A^T = A^{-1}$ gilt, dann folgt $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(c) Wenn $A^T = A^{-1}$ gilt, dann folgt $\|Ax\| = \|x\|$ für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$.

(d) Es sei B eine weitere reelle $n \times n$-Matrix. Wenn gilt $A^T = A^{-1}$ und $B^T = B^{-1}$, dann hat das Produkt AB eine Inverse und es gilt $(AB)^{-1} = (AB)^T$.