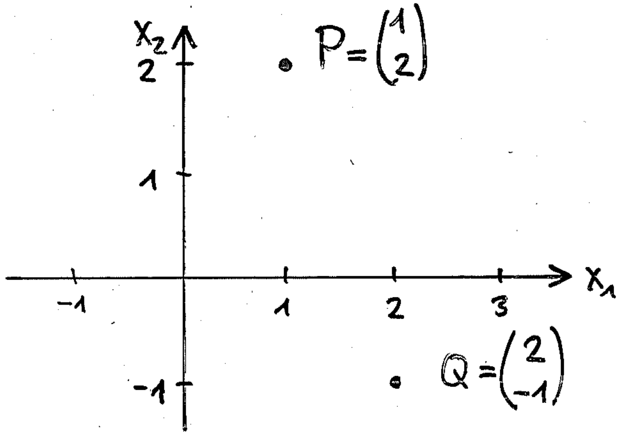
Rep: Vektorrechnung in der Ebene und im Raum

A) Der Vektorbegriff in 2 und 3 Dimensionen

i) In der Ebene

Wir führen in der Ebene Koordinaten ein

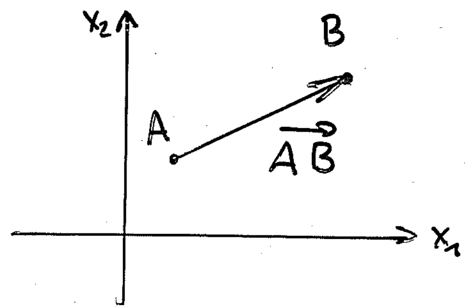


Jedem Punkt der Ebene wird eindeutig ein Zahlenpaar zugeordnet (die zwei Koordinaten x_1, x_2 bezüglich dieses Koordinatensystems). Umgekehrt entspricht jedem Zahlenpaar $\binom{x_1}{x_2}$ genau ein Punkt mit den Koordinaten x_1 und x_2.

Punkte der Ebene $\longleftrightarrow$ Zahlenpaare $\binom{x_1}{x_2}$

Zu je zwei Punkten A und B der Ebene bezeichnet $\overrightarrow{AB}$ den Pfeil von A nach B

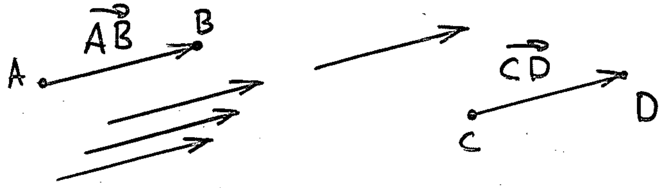
Darstellung in der Ebene:



Wir identifizieren zwei Pfeile, die durch Verschiebung (ohne Drehung) ineinander übergeführt werden können.

Zwei Pfeile sind genau dann gleich, wenn sie die gleiche Richtung und die gleiche Länge haben

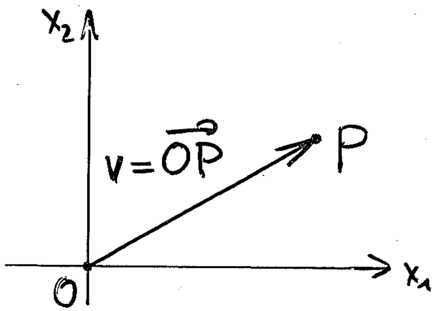
Bsp Einige „gleiche" Pfeile :



Analogie : Brüche $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15} = \ldots$

Wir nennen Pfeile auch **Vektoren**

Oft wird ein Vektor durch den Pfeil repräsentiert, der in O beginnt (O als Anfangspkt hat). Dann ist der Pfeil $\vec{OP}$ durch den Endpunkt P eindeutig festgelegt.

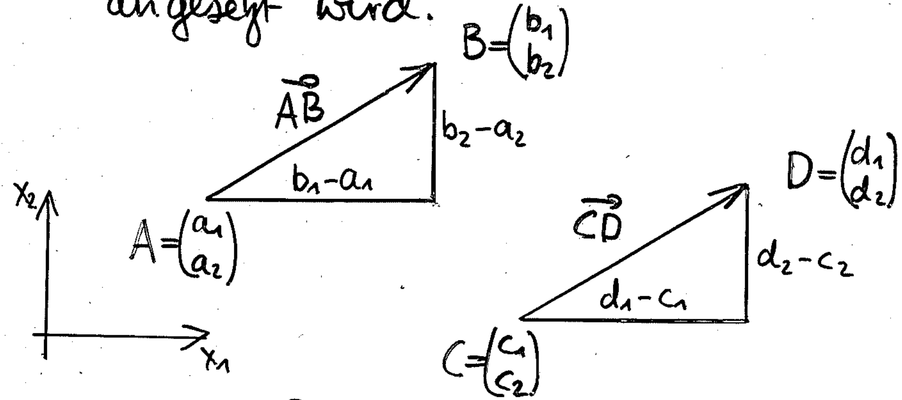


Jedem Punkt P der Ebene wird eindeutig ein Vektor (oder Pfeil) $\vec{OP}$ zugeordnet und umgekehrt.

Darstellung von Vektoren

a) **Als Pfeil** Man kann einen Vektor durch irgendeinen Pfeil repräsentieren, der die richtige Richtung und die richtige Länge hat.

b) **Als Zahlenpaar** Bei Vektoren kommt es nur auf den Zuwachs in x_1-Richtung und den Zuwachs in x_2-Richtung an. Es kommt nicht darauf an, wo er angesetzt wird.



Die Pfeile $\vec{AB}$ und $\vec{CD}$ sind gleich, falls

- $b_1 - a_1 = d_1 - c_1$ = „Zuwachs" in x_1-Richtung
- $b_2 - a_2 = d_2 - c_2$ = „Zuwachs" in x_2-Richtung

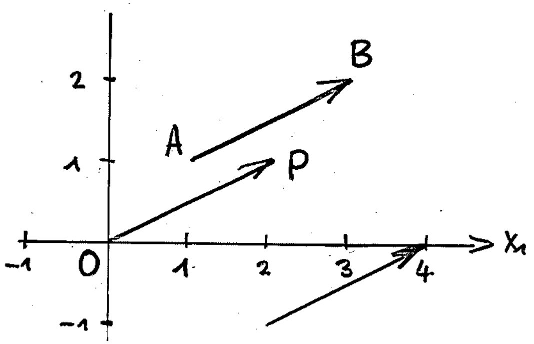
Die Angabe dieser zwei Zuwächse genügt, um einen Vektor eindeutig zu charakterisieren.

Wir schreiben:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - c_1 \\ d_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

<u>Bsp</u> Darstellung eines Vektors

<u>als Pfeil</u>:



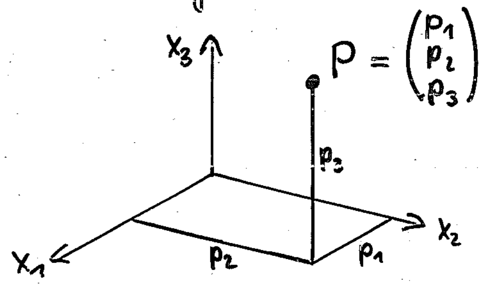
$v = \vec{AB} = \vec{OP}$

<u>als Zahlenpaar</u>:

$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

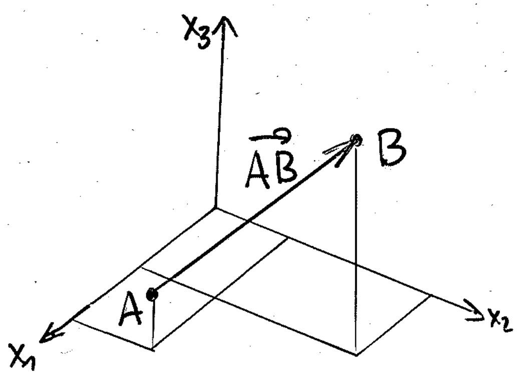
ii) <u>Vektoren im Raum</u>

Koordinatensystem im Raum



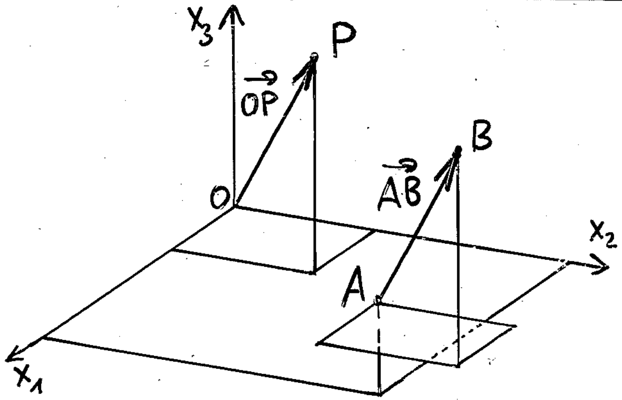
$$\text{Punkt } P \text{ im Raum} \iff \text{Zahlentrippel} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Zu je zwei Punkten A, B im Raum bezeichnet $\vec{AB}$ den <u>Pfeil von A nach B</u>



Zwei Pfeile sind gleich, wenn sie die gleiche Richtung und die gleiche Länge haben;
oder: wenn es eine Verschiebung gibt, die den einen Pfeil in den andern überführt.

Darstellung von räumlichen Vektoren



$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

v_1, v_2, v_3 heissen Komponenten von v.

als Pfeil: $v = \vec{OP} = \vec{AB}$

als Zahlentrippel

Jedem Punkt $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ im Raum wird eindeutig ein räumlicher Vektor $v = \vec{OP}$ zugeordnet und umgekehrt.

$v = \vec{OP}$ (Pfeildarstellung)

$v = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ (Komponentendarstellung)

B) Rechnen mit Vektoren

i) Multiplikation mit einer Zahl

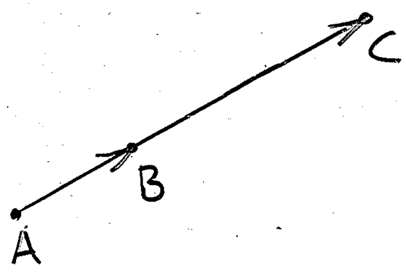
Sei λ eine Zahl, $v = \vec{AB}$ ein Vektor

Def: Der Vektor $\vec{AC}$ heisst λ-faches des Vektors v ($\vec{AC} = \lambda \cdot \vec{AB}$), falls folgendes gilt:

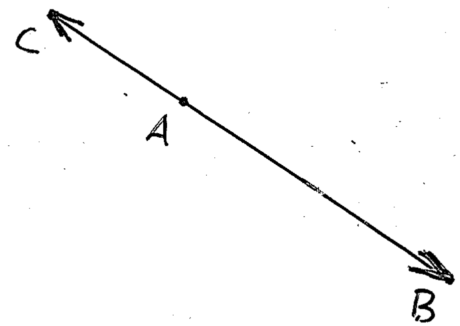
- Gerade AC $\parallel$ Gerade AB
- $|AC| = |\lambda| \, |AB|$
- Falls $\lambda > 0$: B und C liegen auf der gleichen Seite von A

  Falls $\lambda < 0$: A liegt zwischen B und C

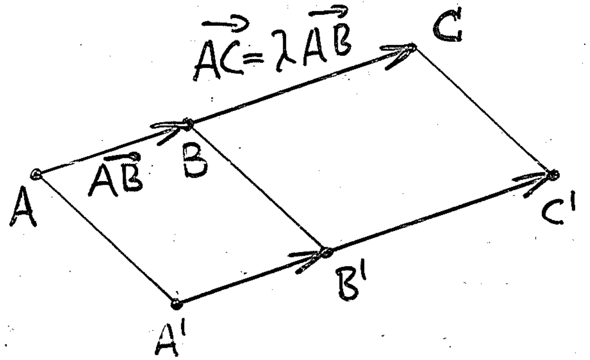
Bsp: $\vec{AC} = 3 \cdot \vec{AB}$



$\vec{AC} = -\frac{1}{2} \vec{AB}$



Bei der Definition von $\lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ kommt es nicht auf die Wahl von A und B an.



$\underline{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}}$ $\Rightarrow$ $AB \upuparrows A'B'$, $|AB| = |A'B'|$

$\Rightarrow$ $AC \upuparrows A'C'$, $|AC| = |A'C'|$

$\Rightarrow$ $\underline{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}}$

Vielfache in Komponentendarstellung

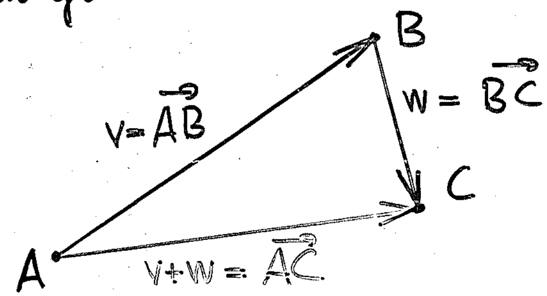
In der Ebene	Im Raum
$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$	$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$
$\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$	$\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}$

ii) Addition

Seien zwei Vektoren v und w gegeben.

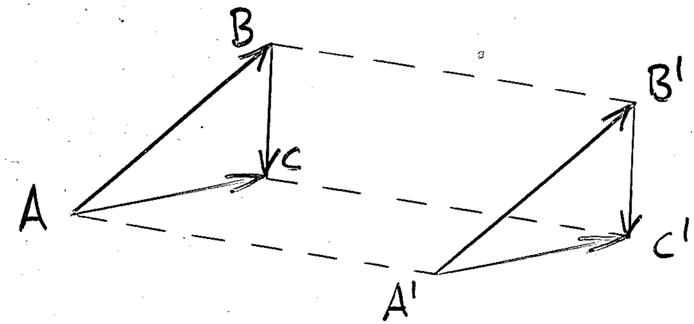
Wähle A und B, so dass $v = \overrightarrow{AB}$.

Dann gibt es einen Punkt C, so dass $w = \overrightarrow{BC}$.



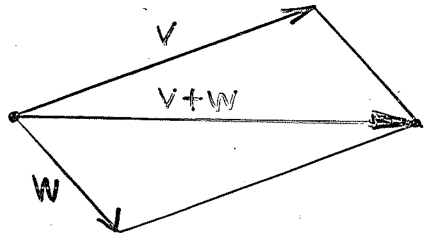
$\boxed{\text{Def: } \quad v + w := \overrightarrow{AC}}$

Es kommt nicht auf die Wahl von A, B an:



$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Die Dreiecke ABC und A'B'C' sind translationsgleich $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$

Etwas andere Darstellung:



Komponentendarstellung

Ebene

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$

Raum

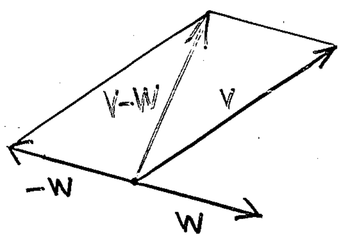
$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$$

Subtraktion

$v - w = ?$

$= v + (-w)$



In Komponenten

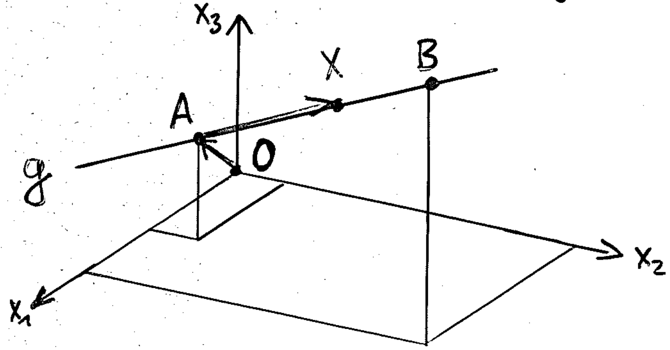
$$v - w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ v_3 - w_3 \end{pmatrix}$$

C) Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen

i) Geraden

Gegeben: Pkte A und B

Gesucht: Alle Pkte X auf der Geraden AB



Für X auf g gilt:

$$\vec{OX} = \vec{OA} + \underbrace{\vec{AX}}_{\text{ist ein Vielfaches von } \vec{AB}}$$

Parameterdarstellung der Geraden g durch A, B:

$$\vec{OX} = \vec{OA} + \underbrace{\lambda}_{\text{beliebige (reelle) Zahl}} \cdot \vec{AB}$$

Komponentendarstellung

$$\boxed{g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Gerade g besteht aus den Punkten X mit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Durchstosspunkt von g durch x_2, x_3-Ebene?

Punkt X mit $x_1 = 0$: $\quad x_1 = 2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

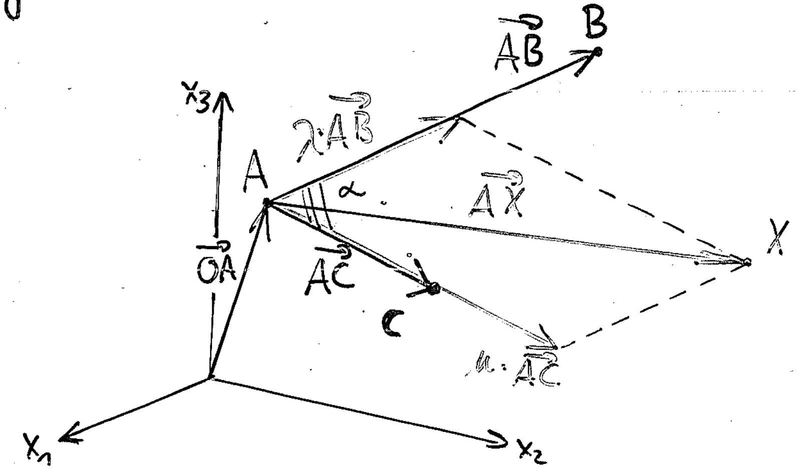
Durchstosspkt ist $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe liegen die drei Punkte $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf einer Geraden?

ii) Ebenen

Gegeben: Drei Punkte A, B, C im Raum

Gesucht: Ebene α durch die Pkte A, B, C



Für X in α gilt

$$\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX}$$

$$\boxed{\vec{OX} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AC}\ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Parameterdarstellung einer Ebene

Komponentendarstellung

$$\boxed{\alpha = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} c_1-a_1 \\ c_2-a_2 \\ c_3-a_3 \end{pmatrix};\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}}$$

D) Das Skalarprodukt

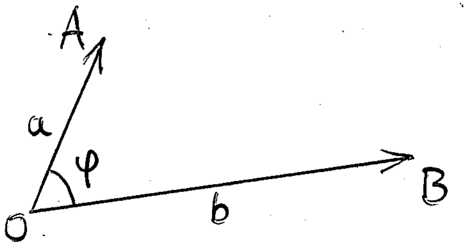
- jedem Paar von Vektoren wird eine Zahl zugeordnet
- Mit Hilfe des Skalarprodukts kann entschieden werden, ob zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Seien a, b zwei Vektoren: $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$

$|a| :=$ Norm von $a :=$ Länge des Pfeils $\overrightarrow{OA}$

$|b| :=$ Norm von $b :=$ Länge des Pfeils $\overrightarrow{OB}$

$\varphi :=$ Winkel zwischen den Pfeilen $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$



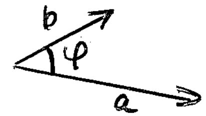
$0 \leq \varphi \leq \pi$

Def: Die Zahl $(a,b) := |a|\,|b| \cos\varphi$ heisst Skalarprodukt der Vektoren a und b

Def: Die Vektoren a und b sind orthogonal (oder: sie stehen senkrecht aufeinander), falls $(a,b) = 0$. (Schreibweise: $a \perp b$)

Eigenschaften des Skalarprodukts

- $(a,b) = (b,a)$

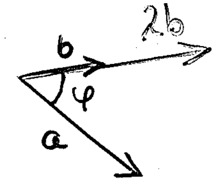


Winkel zwischen a und b
$=$ Winkel zwischen b und a

Es gilt: $|a|\,|b| \cos\varphi = |b|\,|a| \cos\varphi$

- $(a, \lambda b) = \lambda (a,b)$

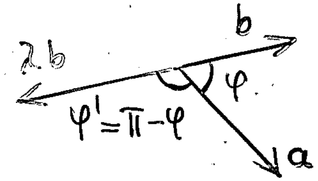
i) $\lambda > 0$:



$$(a, \lambda b) = |a|\,|\lambda b| \cos\varphi = \lambda |a|\,|b| \cos\varphi = \lambda (a,b)$$

ii) $\lambda < 0$:

$$\cos\varphi' = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$$



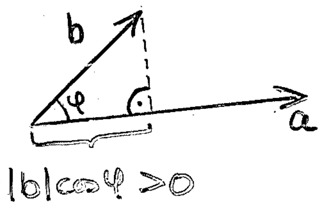
$$(a, \lambda b) = |a|\,|\lambda b| \cos\varphi' = |\lambda|\,|a|\,|b| (-\cos\varphi) = \lambda |a|\,|b| \cos\varphi$$
$$= \lambda (a,b)$$

- $\underline{(a, b+c) = (a,b) + (a,c)}$

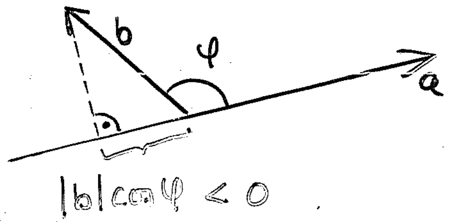
Es ist $(a,b) = |a| \cdot \underbrace{|b| \cos\varphi}_{\text{„Projektion" von } b \text{ auf } a \text{ (Zahl)}}$

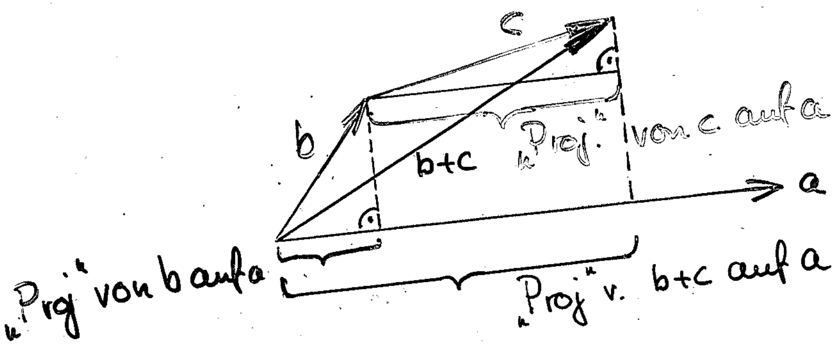
<u>2 Fälle</u>:

$\underline{\varphi < \pi/2}$



$\underline{\varphi > \pi/2}$





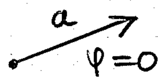
$(a, b+c) = |a| \cdot [\text{„Proj" von } b+c \text{ auf } a]$

$= |a| \cdot [\text{„Proj" v. } b \text{ auf } a + \text{„Proj" v. } c \text{ auf } a]$

$= |a| \cdot \text{„Proj" v. } b \text{ auf } a + |a| \cdot \text{„Proj" v. } c \text{ auf } a$

$= (a,b) + (a,c)$

- $\underline{(a,a) \geq 0}$, $(a,a) = 0$ nur wenn $a = \text{Nullvektor} = \vec{0}$



$(a,a) = |a| \cdot |a| \cos\varphi = |a|^2 > 0$

ausser wenn $|a| = 0$

<u>Zusammenfassung</u>

Für alle Vektoren a, b, c und alle Zahlen λ gilt:

S1: $(a,b) = (b,a)$

S2: $(a, \lambda b) = \lambda (a,b)$

S3: $(a, b+c) = (a,b) + (a,c)$

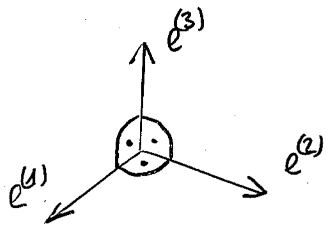
S4: $(a,a) \geq 0$; $(a,a) = 0$ nur für $a = \vec{0}$

S5: $(a,b) = 0 \iff a \perp b$

<u>Skalarprodukt in Komponentenschreibweise</u>

Seien $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gegeben. Mit den <u>Standardeinheitsvektoren</u> $e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

gilt $a = a_1 e^{(1)} + a_2 e^{(2)} + a_3 e^{(3)}$, $b = b_1 e^{(1)} + b_2 e^{(2)} + b_3 e^{(3)}$.



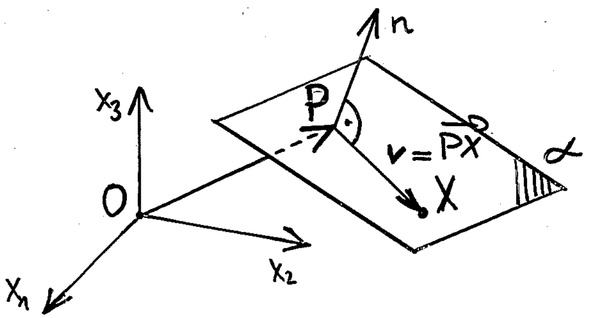
$$|e^{(i)}| = 1$$
$$e^{(i)} \perp e^{(j)} \text{ für } i \neq j$$
$$\Rightarrow (e^{(i)}, e^{(j)}) = 0 \text{ für } i \neq j$$

Wir finden

$$\begin{aligned}(a,b) &= \left(a_1 e^{(1)} + a_2 e^{(2)} + a_3 e^{(3)},\ b_1 e^{(1)} + b_2 e^{(2)} + b_3 e^{(3)}\right) \\ &= a_1 b_1 \left(e^{(1)}, e^{(1)}\right) + a_2 b_2 \left(e^{(2)}, e^{(2)}\right) + a_3 b_3 \left(e^{(3)}, e^{(3)}\right) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\end{aligned}$$

> Für räumliche Vektoren gilt
> $$(a,b) = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
> Für ebene Vektoren gilt
> $$(a,b) = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Die Ebenengleichung



Sei P ein Punkt der Ebene α. n sei ein Normalenvektor von α, d.h., n steht senkrecht auf allen Vektoren $v = \overrightarrow{PX}$, X in α.

In Komponenten:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix},\quad v = \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

$n \perp v$: $\quad (n,v) = n_1(x_1 - p_1) + n_2(x_2 - p_2) + n_3(x_3 - p_3) = 0$

umordnen $\longrightarrow$ Ebenengleichung

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3$$

> Die Ebene α, die durch den Pkt $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ geht und senkrecht auf $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ steht, besteht aus den Punkten $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, welche die Gleichung
> $$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3$$
> erfüllen.

Aufgabe

a) Schnittpkt der x_1-Achse (x_2-, x_3-Achse) mit Ebene $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = 1$?

b) Normalenvektor der Ebene durch die Pkte $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$?

Lösung

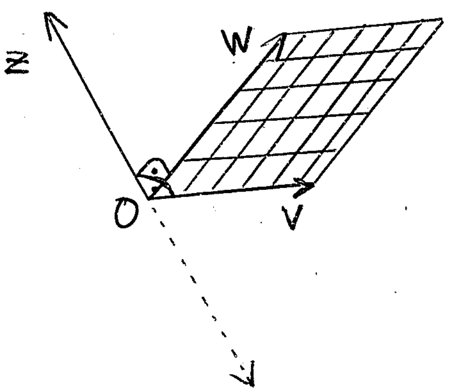
$(1/n_1)$

E) Das Vektorprodukt

- Jedem Paar von Vektoren im Raum wird ein räumlicher Vektor zugeordnet.

Def: Der räumliche Vektor $z = v \times w$ heisst <u>Vektorprodukt</u> der Vektoren v und w, falls gilt

- z steht senkrecht auf v und w
- Die Norm (Länge) von z ist gleich der Fläche des Parallelogramms, aufgespannt durch v und w
- v, w, z bilden ein Rechtssystem

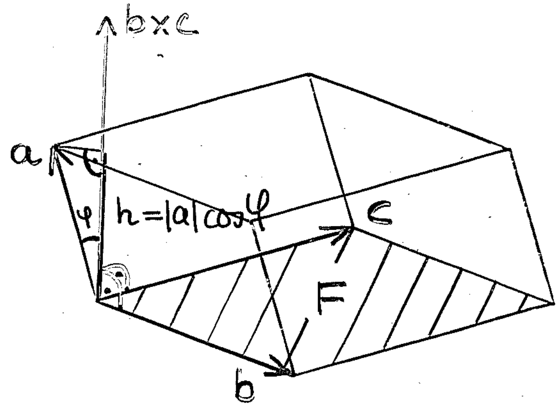


Das Spatprodukt

Seien a, b, c Vektoren

Beh: Das <u>Spatprodukt</u> $(a, b \times c)$ ist gleich dem Volumen des Parallelepipeds, aufgespannt von a, b und c.

Bew:



Vol = Grundfl. · Höhe
$= F \cdot h$

$$(a, b \times c) = \underbrace{|b \times c|}_{F}\ \underbrace{|a| \cdot \cos\varphi}_{h}$$

Def. Skalarprod.

$\perp$

Bemerkung: Das Spatprodukt $(a, b \times c)$ ist positiv, falls a, b, c ein Rechtssystem bilden; es ist negativ, falls a, b, c ein Linkssystem bilden.

offenbar gilt

$(a, b\times c) = (b, c\times a) = (c, a\times b)$

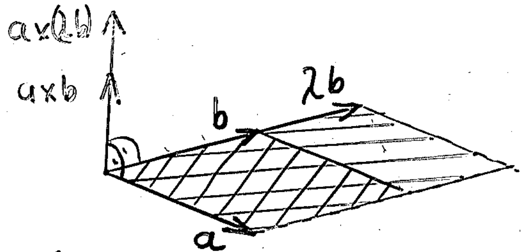
Zyklisch vertauschen

Eigenschaften des Vektorprodukts

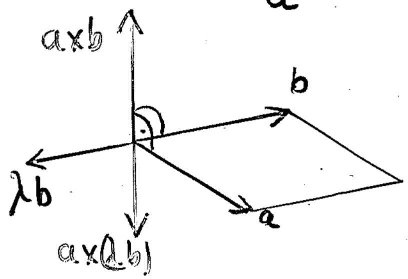
- $\underline{a\times b = -b\times a}$ $\qquad a\times a = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

- $\underline{a\times(\lambda b) = \lambda(a\times b)}$

$\lambda > 0$:



$\lambda < 0$:



- $\underline{a\times(b+c) = a\times b + a\times c}$

definiere $d := a\times(b+c) - a\times b - a\times c$

zu zeigen: $d = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Sei v ein beliebiger Vektor

$\underline{\underline{(v,d)}} = (v, a\times(b+c) - a\times b - a\times c)$

$\overset{S3}{=} (v, a\times(b+c)) - (v, a\times b) - (v, a\times c)$

zyklisch vertauschen

$= (b+c, v\times a) - (b, v\times a) - (c, v\times a)$

$\overset{S3}{=} ((b+c)-b-c, v\times a) = (0, v\times a) \underline{\underline{= 0}}$

Somit: Für jedes v gilt

$(v,d) = v_1 d_1 + v_2 d_2 + v_3 d_3 = 0$

Es folgt $\underline{d = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}$ $\left[\text{Wähle z.B. } v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Das Vektorprodukt hat folgende Eigenschaften}\\[1em] \text{V1:}\quad a\times b = -b\times a\\ \text{V2:}\quad a\times(\lambda b) = \lambda(a\times b)\\ \text{V3:}\quad a\times(b+c) = a\times b + a\times c\\ \text{V4:}\quad a\times b = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff a \parallel b\end{array}}$$

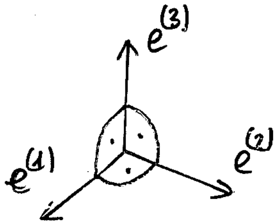
Zu V4: Fläche $= 0$

Vektorprodukt in Komponentendarstellung

Seien $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gegeben. Es ist

$$a = a_1 e^{(1)} + a_2 e^{(2)} + a_3 e^{(3)}, \quad b = b_1 e^{(1)} + b_2 e^{(2)} + b_3 e^{(3)},$$

$e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$ wie vorher (S.18). Es gilt



$$e^{(1)} \times e^{(2)} = e^{(3)}, \quad e^{(1)} \times e^{(3)} = -e^{(2)}$$
$$e^{(2)} \times e^{(1)} = -e^{(3)}, \quad e^{(2)} \times e^{(3)} = e^{(1)}$$
$$e^{(3)} \times e^{(1)} = e^{(2)}, \quad e^{(3)} \times e^{(2)} = -e^{(1)}$$

Wir finden

$$\begin{aligned} a \times b &= \left(a_1 e^{(1)} + a_2 e^{(2)} + a_3 e^{(3)}\right) \times \left(b_1 e^{(1)} + b_2 e^{(2)} + b_3 e^{(3)}\right) \\ &= \left(a_1 e^{(1)} + a_2 e^{(2)} + a_3 e^{(3)}\right) \times b_1 e^{(1)} + \left(a_1 e^{(1)} + a_2 e^{(2)} + a_3 e^{(3)}\right) \times b_2 e^{(2)} \\ &\quad + \left(a_1 e^{(1)} + a_2 e^{(2)} + a_3 e^{(3)}\right) \times b_3 e^{(3)} \\ &= -a_2 b_1 e^{(3)} + a_3 b_1 e^{(2)} + a_1 b_2 e^{(3)} - a_3 b_2 e^{(1)} \\ &\quad - a_1 b_3 e^{(2)} + a_2 b_3 e^{(1)} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

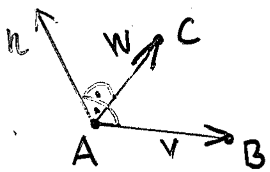
Es gilt

$$\boxed{a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

Merkregel: $a \times b = \det \begin{pmatrix} e^{(1)} & a_1 & b_1 \\ e^{(2)} & a_2 & b_2 \\ e^{(3)} & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$

Bsp: **Geg:** $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ges: Ebenengleichung der Ebene durch A, B, C



Suche Normalenvektor

$$v = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{n}} = v \times w = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2 \\ 4-1 \\ 1+6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}}$$

Ebenengleichung

$$-5x + 3y + 7z = (n, \vec{OA}) = \left(\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -5+6+7$$

$$\underline{\underline{-5x + 3y + 7z = 8}}$$