

Serie 12

Aufgabe 1 ist online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 22. Dezember um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

1. Betrachten Sie den \mathbb{R} -Vektorraum $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} mit der Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Darin enthalten ist der Unterraum $P_2 := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ der Polynome mit $\text{Grad} \leq 2$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (a) $\text{span}\{x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1\}$ ist gleich P_2 .
- (b) $x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1$ sind linear unabhängig.
- (c) $x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1$ bilden ein Erzeugendensystem von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (d) $x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1$ bilden ein Erzeugendensystem von P_2 .

2. Bestimmen Sie, ob $V = \mathbb{R}^3$, versehen mit der Standard-Skalarmultiplikation \cdot und der Addition \oplus , ein \mathbb{R} -Vektorraum ist, wobei \oplus wie folgt definiert ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 - y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

3.

- a) Sei V die folgende Menge von Vektoren: $\{(x, y, 3x - y)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass V ein Unterraum des reellen Vektorraumes \mathbb{R}^3 ist.
- b) Ist die Menge $W = \{(x, 3x - 1, x)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ auch ein Unterraum von \mathbb{R}^3 ? Begründen Sie Ihre Antwort.

4.

a) Die Menge $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$, versehen mit den Rechenregeln

$$\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \odot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

ist ein Körper. Das heisst, es gelten bezüglich Addition \oplus und Multiplikation \odot die selben Rechenregeln wie in \mathbb{R} , \mathbb{C} oder \mathbb{Q} . Versehen Sie

$$V = \mathbb{Z}_2^n = \{(x_1, \dots, x_n)^T \mid x_i \in \mathbb{Z}_2\}$$

mit den passenden Vektoroperationen und zeigen Sie, dass V damit ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{Z}_2 wird.

b) Sei $C = \{x \in \mathbb{Z}_2^n \mid x_1 + \dots + x_n \text{ ist gerade}\}$. Zeigen Sie, dass C ein Unterraum von \mathbb{Z}_2^n ist.

Bemerkung: C ist ein sogenannter 1-fehlererkennender Code: Wird ein Bit einer Nachricht $x \in C$ falsch übermittelt, kann der Empfänger dies feststellen (wie?) und die Wiederholung der Übermittlung veranlassen.