Serie 1

Aufgabe 1 ist online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 6. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

---

1. Gegeben sei das LGS (lineare Gleichungssystem)

$$\begin{array}{cccl} ax & + & y & = a \\ x & + & ay & = a \end{array} .$$

Welche Aussagen treffen zu?

(a) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.

Für $a = 1$ sind beide Gleichungen $x + y = 1$. Also hat man nur eine lineare Gleichung, und ein solche kann nicht gleichzeitig die Werte zweier Variablen fixieren.

√ (b) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Für $a = 1$ ist jedes Paar $(x, y) = (\alpha, 1 - \alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Lösung des LGS.

√ (c) Für $a = -1$ besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.

Mit $a = -1$ erhalten wir die Gleichungen $-x+y = -1$ und $x-y = -1$. Multipliziert man die erste Gleichung beidseitig mit -1 (eine solche Operation lässt die Lösungsmenge natürlich unverändert) so erhalten wir das widersprüchliche Gleichungssystem: $x-y = 1$ und $x - y = -1$.

(d) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau zwei Lösungen.

Ein LGS hat entweder **keine**, **genau eine** oder aber **unendlich viele** Lösungen. Achtung: Ein Paar (x, y) welches das LGS erfüllt zählt als **eine** Lösung, nicht etwa als zwei Lösungen.

√ (e) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.

Nach kurzer Rechnung folgt, dass $x = y = 2/3$ die einzige mögliche Lösung ist.

2. Man löse die folgenden zwei Gleichungssysteme mit dem Gauss–Algorithmus:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & b_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & b_2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & = & b_3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & + & 20x_4 & = & b_4 \end{array}$$

a) $b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 2;$

b) $b_1 = 0,\ b_2 = -3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 1.$

Mit dem Gauss–Algorithmus erhält man für **a)** bzw. **b)** schrittweise ein einfacheres Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & a) & b) \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 2 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & a) & b) \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 18 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{rrrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & a) & b) \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 12 & -5 & 10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & a) & b) \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & -10 \end{array}$$

Es folgt, indem man zuerst x_4, dann x_3, x_2 und x_1 ausrechnet:

a) $x_4 = \frac{5}{4},\ x_3 = -4,\ x_2 = \frac{7}{2},\ x_1 = 3;$

b) $x_4 = -5,\ x_3 = 14,\ x_2 = -7,\ x_1 = -11.$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems mit dem Gauss–Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}.$$

Mit dem Gauss–Algorithmus bringt man zunächst das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{rrr|l} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|l} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 8 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|l} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}$$

Wir haben mehr Unbekannte als Gleichungen. In solchen Fällen gibt es entweder keine Lösung (wenn mehrere Gleichungen sich widersprechen, z.B. $x+y+z=1$ und $x+y+z=0$) oder unendlich viele. Hier hat man unendlich viele Lösungen: für jede Wahl von x_3 kann man ein passendes x_2 finden, so dass $-5x_2+5x_3=5$ gilt. Formell schreiben wir: $x_3 = t \in \mathbb{R}$ (t ist ein sogenannter **freier Parameter**). Daraus folgt

$$x_2 = \frac{5-5t}{-5} = t-1 \text{ und } x_1 = 1-3(t-1)+t = 4-2t.$$

Die **Lösungsmenge** des Gleichungssystems ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 4-2t \\ t-1 \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Lösen Sie die Aufgaben **2** und **3** nochmals mit Hilfe von MATLAB.

Der folgende Code löst die Aufgabe. % markiert kommentierte Zeilen, die also nicht ausgeführt werden. Jede Zeile ist mit Enter abzuschliessen/einzugeben.

```
%Aufgabe 2
A=[ 1 1 2 2;
    1 2 3 4;
    1 3 6 10;
    1 4 10 20]
b1=[1; 3; 2; 2]
b2=[0; -3; 2; 1];
x1=A\b1
x2=A\b2

% Aufgabe 3
C=[3 4 2;
   1 3 -1];
d=[8; 1];
x3=null(C,'r')
% null(C) berechnet eine nichttriviale Loesung des entsprechenden
% homogenen Gleichungsystems; die Option 'r' stellt sicher, dass
% die Loesung rational ist
x4=C\d
% Die allgemeine Loesung ist von der Form c*x3+x4, wobei c eine
% beliebige reelle Zahl ist.
```

5. (Fakultativ) Man zeige, dass zur Ausführung des Gaussverfahrens die Operation

(II) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

genügt.

Man muss zeigen, dass man jede Operation vom Typ (I) - Zeilen vertauschen - durch eine Folge von Operationen vom Typ (II) ersetzen kann. Also angenommen man möchte die a-te und b-te Zeile vertauschen, dann kann man zum Beispiel wie folgt vorgehen:

Operation	Inhalt der a-ten Zeile	Inhalt der b-ten Zeile
	X	Y
zur Zeile b Zeile a hinzuaddieren	X	$X+Y$
von Zeile a Zeile b subtrahieren	$-Y$	$X+Y$
zur Zeile b Zeile a hinzuaddieren	$-Y$	$X.$

Bis auf das Vorzeichen in der Zeile a haben wir die gewünschte Vertauschung erreicht. Da Vorzeichen beim Gauss-Verfahren keine Rolle spielen, ist diese Konfiguration äquivalent zu derjenigen, in der Y in der a-ten Zeile und X in der b-ten Zeile steht.