Lösungen 2

Aufgabe 1 ist online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 13. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

---

1. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Jedes lineare Gleichungssystem mit der gleichen Anzahl von Gleichungen wie Unbekannten hat eine eindeutige Lösung.

Nein, z.B. hat das LGS $0 \cdot x = a$ keine Lösung für $a \neq 0$ respektive unendlich viele Lösungen für $a = 0$.

(b) Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens eine Lösung.

Nein, z.B. hat das LGS $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1$ keine Lösung. Finden Sie ein Beispiel mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen.

(c) Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.

Doch, z.B. kann eine bereits im System vorhandene Gleichung beliebig oft hinzugefügt werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.

$\surd$ (d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

2. Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2bx_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & & & 4x_3 & = & 5 \\ & & 2bx_2 & + & 3ax_3 & = & b \end{array}$$

a) Lösungen mit *zwei* freien Parametern besitzt,

b) Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,

c) eindeutig lösbar ist,

d) keine Lösung hat

und geben Sie in jedem Fall die Lösungsmenge an.

Mit dem Gauss–Algorithmus bringt man zunächst das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2b & 3a & b \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 0 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 3a & b \end{array} \quad (*)$$

<u>**Fall b = 0**</u>: Zeilen vertauschen ergibt

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

i) <u>$a = 0$:</u> Die Lösungsmenge ist $x_3 = s,\ x_2 = t,\ x_1 = \frac{5}{3} - \frac{4}{3}s$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.

ii) <u>$a \neq 0$:</u> Die Lösungsmenge ist $x_3 = 0,\ x_2 = t,\ x_1 = \frac{5}{3}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

<u>**Fall b ≠ 0**</u>: Hier ist $-2b$ Pivot bei $(*)$:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 0 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3a & b \end{array}$$

i) <u>$a = 0$:</u> In diesem Fall gibt es keine Lösung.

ii) <u>$a \neq 0$:</u> Die Lösung ist $x_3 = \frac{b}{3a},\ x_2 = 0,\ x_1 = \frac{5}{3} - \frac{4b}{9a}$.

Folglich gilt

a) falls $a = 0,\ b = 0$,

b) falls $a \neq 0,\ b = 0$,

c) falls $a \neq 0,\ b \neq 0$,

d) falls $a = 0,\ b \neq 0$.

3. *Dimensionsanalyse des Strömungswiderstands eines Schiffes*:
Im cgs-Masssystem gilt für die Einheiten:

Dichte des Wassers	$\rho:$	$cm^{-3}g^1sec^0$,
Schiffsgeschwindigkeit	$v:$	$cm^1g^0sec^{-1}$,
benetzte Oberfläche	$\mathcal{O}:$	$cm^2g^0sec^0$,
Schiffsmasse	$m:$	$cm^0g^1sec^0$,
Bremsverzögerung	$a:$	$cm^1g^0sec^{-2}$.

a) Welche Formeln des Typs

$$\rho^\alpha v^\beta \mathcal{O}^\gamma m^\delta a^\varepsilon = K$$

sind vom Masssystem her möglich, wenn K eine dimensionslose Zahl sein soll?

b) Welche Formeln ergeben sich für die Widerstandskraft $F = ma$?

Bemerkung: Die gefundene Lösung ist bei Schiffbauingenieuren tatsächlich in Gebrauch.

a) Damit K eine dimensionslose Zahl ist, müssen die Summen der Exponenten von cm, g und sec jeweils 0 ergeben. Dies entspricht dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -3\alpha & + & \beta & + & 2\gamma & & & + & \varepsilon & = & 0 \\ \alpha & & & & & + & \delta & & & = & 0 \\ & & -\beta & & & & & - & 2\varepsilon & = & 0. \end{array}$$

Das entsprechende Gauss-Schema ist

$$\begin{array}{rrrrr} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \hline -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrr} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrr} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrr} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}$$

und man kann also δ und ε frei wählen. Setze $\delta = s, \varepsilon = t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$. Für die restlichen Exponenten findet man

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}s, \\ \beta &= -2t, \\ \alpha &= -s. \end{aligned}$$

Die Formeln vom Typ

$$\rho^{-s}v^{-2t}\mathcal{O}^{\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}s}m^s a^t = K$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$ ergeben folglich das gewünschte Resultat.

b) Wenn man in die bei **a)** erhaltene Formel $s = t = 1$ setzt, findet man

$$\rho^{-1}v^{-2}\mathcal{O}^{-1}ma = K.$$

Nach Umformen ergibt dies

$$ma = K\rho v^2\mathcal{O}.$$

Aus der Formel $F = ma$ folgt also $F = K\rho v^2\mathcal{O}$.

Bemerkung: Die Konstante K nennt man *Widerstandsbeiwert*.

4. Gegeben seien die zwei linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit dem Gauss–Algorithmus die Lösungsmengen der beiden Gleichungssysteme.

b) Lösen Sie die Aufgabe nochmals mit Hilfe von MATLAB.

a) Für $i = 1, 2$ entspricht $Ax = b_i$ einem linearen Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten x_1, x_2, x_3. Wie in Serie 1, Aufgabe 2, kann man beide rechten Seiten im gleichen Gauss-Schema schreiben (der Hauptteil ist gleich):

$$\begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 3 & -2 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Für b_1 folgt also:

$$\begin{aligned} &x_3 \text{ beliebig, also } x_3 = t \in \mathbb{R} \text{ ist ein freier Parameter,} \\ &x_2 + 2x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - 2t, \\ &x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1 \Rightarrow x_1 = -1 + 3t + 2(1 - 2t) = 1 - t. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $Ax = b_1$ ist also

$$L_1 = \left\{ (1 - t, 1 - 2t, t)^\top \in \mathbb{R}^3 \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für b_2 folgt analog

$$\begin{aligned} &x_3 \text{ beliebig, also } x_3 = s \in \mathbb{R} \text{ ist ein freier Parameter,} \\ &x_2 + 2x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = 3 - 2s, \\ &x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2 \Rightarrow x_1 = -2 + 3s + 2(3 - 2s) = 4 - s. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $Ax = b_2$ ist somit

$$L_2 = \left\{ (4 - s, 3 - 2s, s)^\top \in \mathbb{R}^3 \middle| s \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Siehe Lösung Serie 1, Aufgabe 4.