

Serie 4

Aufgabe 1 ist online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 27. Oktober um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $(AB)^T = A^T B^T$.

Die Formel $(AB)^T = A^T B^T$ ist im Allgemeinen falsch, so auch in diesem Beispiel.

Nachrechnen zeigt: $(AB)^T = \begin{pmatrix} 19 & 23 \\ 21 & 25 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 23 & 25 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -6 & 4 & -8 \\ 15 & 24 & 24 \\ 17 & 17 & 26 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = A^T B^T$ was schon von den Matrixdimensionen her keine

Gleichheit sein kann. Aber auch für quadratische Matrizen A, B derselben Größe ist die Formel im Allgemeinen falsch.

✓ (b) $(AB)^T = B^T A^T$.

Richtig! Diese Formel ist sogar im Allgemeinen richtig (sofern das Produkt AB definiert

ist). Rechnung: $(AB)^T = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 23 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = B^T A^T$.

✓ (c) $A^T A$ ist symmetrisch.

Ja, es gilt allgemein: Ist A eine $m \times n$ -Matrix, so ist $A^T A$ eine symmetrische $n \times n$ -Matrix, denn $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$. Und eine Matrix M ist per Definition genau dann symmetrisch, wenn $M^T = M$ gilt.

✓ (d) AA^T ist symmetrisch.

Ja, es gilt allgemein: Ist A eine $m \times n$ -Matrix, so ist AA^T eine symmetrische $m \times m$ -Matrix, denn $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$. Bemerkung: $A^T A$ und AA^T sind beide symmetrisch, aber im Allgemeinen nicht gleich (z.B. wenn $n \neq m$).

✓ (e) Ist C eine beliebige quadratische Matrix, so ist $C + C^T$ symmetrisch.

Ja, es gilt $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$. Bemerkung: wäre C nicht quadratisch, so wäre $C + C^T$ nicht definiert.

Es gilt allgemein: $(AB)^T = B^T A^T$ falls A eine $m \times p$ und B eine $p \times n$ -Matrix ist. Die Anzahl Spalten von A und die Anzahl Zeilen von B (beide gleich p) müssen übereinstimmen, damit AB definiert ist - das Produkt $B^T A^T$ ist dann automatisch auch definiert.

Herleitung der Formel (nur die Notation ist ein bisschen tricky):

Es sei $C = AB$ und a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} bezeichne die Einträge der jeweiligen Matrizen (der erste Index ist die Zeilennummer, der zweite die Spaltennummer). Weiter seien α_{ij}, β_{ij} die Einträge der Matrizen A^T, B^T . Aus der Definition der Transponierten folgt $\alpha_{ij} = a_{ji}, \beta_{ij} = b_{ji}$, und die Definition der Matrizenmultiplikation liefert $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$. Nun ist der Eintrag (i, j) der Matrix $(AB)^T$ gleich (beachte die vertauschten Indices) $c_{ji} = \sum_{k=1}^p a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^p \beta_{ik} \alpha_{kj}$ und dieser Ausdruck entspricht auch dem Eintrag (i, j) der Matrix $B^T A^T$.

2. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden Matrixprodukte:

$$AB, BA, Ax, A^2 := AA, B^2 := BB, y^T x, yx, xy^T, B^T y, y^T B.$$

b) Lösen Sie a) nochmals mit Hilfe von MATLAB.

a) Es gilt:

$$AB = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -21 \\ -9 & -1 \\ 12 & 17 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -26 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -1 & -1 \\ -17 & 15 & -22 \\ -11 & -13 & 21 \end{pmatrix}$$

$$y^T x = (1 \ 4 \ -3) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -20$$

$$xy^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} (1 \ 4 \ -3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & 6 \\ 4 & 16 & -12 \end{pmatrix}$$

$$B^T y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y^T B = (1 \ 4 \ -3) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = (-6 \ -1)$$

Die Matrixprodukte BA , B^2 und yx sind nicht definiert.

3. Polynominterpolation:

Gegeben sind die Funktionswerte y_0, y_1, \dots, y_n über den Abszissen x_0, x_1, \dots, x_n .
Gesucht ist das interpolierende Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Es soll also gelten

$$p(x_i) = y_i, \quad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

a) Man bestimme das Gleichungssystem für die Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n in Matrixschreibweise.

b) Man bestimme das Interpolationspolynom für

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y_i & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \quad (n = 4).$$

c) Man betrachte die Polynome

$$\ell_i(x) := \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Welche Werte nimmt ℓ_i in den Punkten x_k an? Man bestimme die Lösung von b) mit Hilfe der Polynome ℓ_i (Lagrangesche Interpolationsformel).

a) Wir haben das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{array}{cccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \\ \hline 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n & y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n & y_1 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n & y_n \end{array}$$

b) Nach Einsetzen der angegebenen Werte von x_i und y_i in **a)** erhalten wir

$$\begin{array}{cccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 2 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 27 & 81 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 64 & 256 & 0 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{cccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 78 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 60 & 252 & -4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 36 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 168 & 8 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{ccccc|c}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 & 6 & 14 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 36 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 24 & -12
\end{array}$$

Rückwärtseinsetzen ergibt dann

$$a_4 = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{23}{6}, a_2 = -9, a_1 = \frac{20}{3}, a_0 = 0.$$

c) Es gilt

$$\ell_i(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{für } k = i \\ 0, & \text{für } k \neq i. \end{cases}$$

Definiere

$$\delta_{ik} := \begin{cases} 1, & \text{für } k = i \\ 0, & \text{für } k \neq i \end{cases}$$

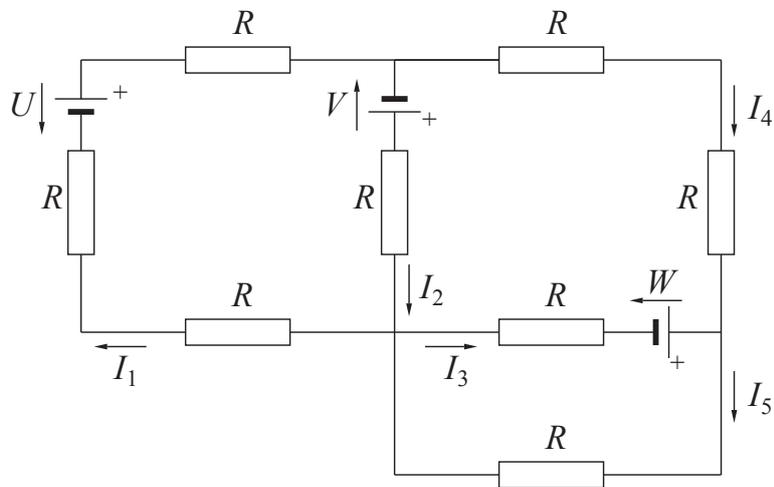
und sei $L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x)$. Aus den obigen Gleichungen für $\ell_i(x_k)$ folgt

$$L(x_k) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x_k) = \sum_{i=0}^n y_i \delta_{ik} = y_k.$$

Also erfüllt $L(x)$ die Bedingungen für das Polynom $p(x)$.

Für die Werte in **b)** erhalten wir

$$\begin{aligned}
L(x) &= \sum_{i=0}^4 y_i \ell_i(x) \\
&= \ell_1(x) + 2\ell_3(x) \\
&= -\frac{1}{6}x(x-2)(x-3)(x-4) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)(x-4) \\
&= \dots \\
&= -\frac{1}{2}x^4 + \frac{23}{6}x^3 - 9x^2 + \frac{20}{3}x.
\end{aligned}$$



4. Kirchhoffsche Regeln:

Für elektrische Stromkreise gelten die folgenden Regeln:

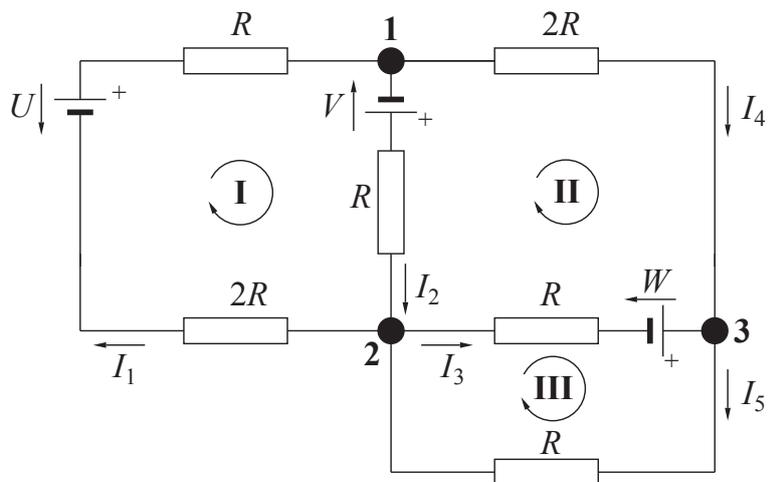
- Die Summe der Teilströme in jedem Knoten ist Null.
- Die Summe der Teilspannungen in jeder Masche ist Null.

Bestimmen Sie das lineare Gleichungssystem für die fünf Teilströme des skizzierten Gleichstromkreises und lösen Sie es für

$$R = 300\Omega, \quad U = V = 300V, \quad W = 200V.$$

Hinweis: Wählen Sie die Vorzeichen entsprechend den Zählpfeilen!

Für die Teilströme I_1, \dots, I_5 kann man aus der obigen Skizze die folgenden Gleichungen ablesen:



$$\begin{array}{l}
\mathbf{1.} \quad I_1 - I_2 - I_4 = 0 \\
\mathbf{2.} \quad -I_1 + I_2 - I_3 + I_5 = 0 \\
\mathbf{3.} \quad I_3 + I_4 - I_5 = 0
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{l}
\mathbf{I.} \quad 3RI_1 + RI_2 = U + V \\
\mathbf{II.} \quad -RI_2 - RI_3 + 2RI_4 = -V - W \\
\mathbf{III.} \quad RI_3 + RI_5 = W
\end{array}$$

Für $R = 300\Omega$, $U = V = 300V$ und $W = 200V$ bekommt man daraus die Matrix

$$\begin{array}{ccccc|c}
I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & 1 \\
\hline
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & -3 & -3 & 6 & 0 & -5 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2
\end{array}$$

Nach Anwendung des Gaussverfahrens wird diese zu

$$\begin{array}{ccccc|c}
I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & 1 \\
\hline
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 78 & 16 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Durch Rückwärtseinsetzen findet man

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 17A \\ 27A \\ 18A \\ -10A \\ 8A \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.436A \\ 0.692A \\ 0.462A \\ -0.256A \\ 0.205A \end{pmatrix}.$$