Lösungen Serie 12

1. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der Addition

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Darin enthalten ist der Unterraum $P_2 := \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ der Polynome mit Grad ≤ 2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) $\operatorname{span}\{x+1, x-1, x^2+1, x^2-1\}$ ist gleich P_2.

Richtig, denn man kann die Monome $1 = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1)$, $x = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1)$ und $x^2 = x^2 + 1 - \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1)$ als Linearkombination der ersten drei Vektoren darstellen und folglich auch alle Polynome vom Grad ≤ 2.

(b) $x+1, x-1, x^2+1, x^2-1$ sind linear unabhängig.

Falsch, z.B. gilt $-(x+1) + (x-1) + (x^2+1) = (x^2-1)$. Der vierte Vektor (und auch alle anderen Vektoren in P_2, siehe vorige Erklärung) lässt sich also mit den ersten drei erzeugen/als Linearkombination darstellen.

(c) $x+1, x-1, x^2+1, x^2-1$ bilden ein Erzeugendensystem von $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Falsch, z.B. ist das Polynom $x^3 \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ keine Linearkombination der gegebenen Polynome. Es existiert auch gar kein Erzeugendensystem aus nur endlich vielen Vektoren. Das sieht man daran, dass die unendlich vielen Vektoren/Funktionen $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$, wobei $\delta_i(x) = \begin{cases} 1, & x = i; \\ 0, & x \neq i \end{cases}$, linear unabhängig sind.

√ (d) $x+1, x-1, x^2+1, x^2-1$ bilden ein Erzeugendensystem von P_2.

Richtig, dies ist per Definition äquivalent zur ersten Aussage.

2. Bestimmen Sie, ob $V = \mathbb{R}^3$, versehen mit der Standard-Skalarmultiplikation $\cdot$ und der Addition $\oplus$, ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wobei $\oplus$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 - y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir müssen überprüfen, ob die Rechenregeln (A1)-(M3) der Vorlesung für die vorgegebenen Operationen gelten. Für $x, y \in V = \mathbb{R}^3$ gilt

$$x \oplus y = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 - y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}, \text{ aber } \quad y \oplus x = \begin{pmatrix} y_1 + x_2 \\ y_2 - x_1 \\ y_3 + x_3 \end{pmatrix},$$

also gilt im Allgemein <u>nicht</u> $x \oplus y = y \oplus x$ und $V = (\mathbb{R}^3, \oplus, \cdot)$ ist deshalb sicher kein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

3.

a) Sei V die folgende Menge von Vektoren: $\{(x, y, 3x - y)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.
Zeigen Sie, dass V ein Unterraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Ist die Menge $W = \{(x, 3x - 1, x)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ auch ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: V und W sind offensichtlich nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}^3$.

a) Wir zeigen: $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x - y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$:

- Seien $a = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 3x_1 - y_1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 3x_2 - y_2 \end{pmatrix} \in V$. Es gilt:

$$a+b = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 3(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 3x_3 - y_3 \end{pmatrix} \in V, \text{ wobei } x_3 = x_1+x_2,\ y_3 = y_1+y_2.$$

- Sei a wie oben, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha a = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ 3\alpha x_1 - \alpha y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 3x_4 - y_4 \end{pmatrix} \in V, \text{ wobei } x_4 = \alpha x_1,\ y_4 = \alpha y_1.$$

Also ist V ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

b) Betrachte nun $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x - 1 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$.

Seien $a = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 - 1 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} x_2 \\ 3x_2 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in W$. Dann gilt:

$$a + b = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 3(x_1 + x_2) - 2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \notin W.$$

W ist also <u>kein</u> Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Alternativ lässt sich argumentieren, dass W den Nullvektor nicht enthält, aber jeder Untervektorraum muss den Nullvektor enthalten (da dieser wiederum ein Vektorraum ist).

4.

a) Die Menge $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$, versehen mit den Rechenregeln

$$\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} \odot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

ist ein Körper. Das heisst, es gelten bezüglich Addition $\oplus$ und Multiplikation $\odot$ die selben Rechenregeln wie in $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{Q}$. Versehen Sie

$$V = \mathbb{Z}_2^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n)^T \mid x_i \in \mathbb{Z}_2\right\}$$

mit den passenden Vektoroperationen und zeigen Sie, dass V damit ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ wird.

b) Sei $C = \{x \in \mathbb{Z}_2^n \mid x_1 + \ldots + x_n \text{ ist gerade}\}$. Zeigen Sie, dass C ein Unterraum von $\mathbb{Z}_2^n$ ist.

Bemerkung: C ist ein sogenannter 1-fehlererkennender Code: Wird ein Bit einer Nachricht $x \in C$ falsch übermittelt, kann der Empfänger dies feststellen (wie?) und die Wiederholung der Übermittlung veranlassen.

Lösung:

a) Man definiere in $\mathbb{Z}_2^n$ die Vektorraumoperationen gleich wie in $\mathbb{R}^n$:

$$(x_1, \ldots, x_n)^T + (y_1, \ldots, y_n)^T := (x_1 \oplus y_1, \ldots, x_n \oplus y_n)^T,$$

$$\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n)^T := (\alpha \odot x_1, \ldots, \alpha \odot x_n)^T \quad \text{für} \quad \alpha \in \mathbb{Z}_2.$$

Man rechnet analog wie im Fall $\mathbb{R}^n$ nach, dass für $\mathbb{Z}_2^n$ die Rechnenregeln (A1)-(M3) gelten. Dies zeigt, dass $\mathbb{Z}_2^n$ ein Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$ ist.

b) Für $x, y \in C$ gilt

- $x_1 + \cdots + x_n$ gerade, und
- $y_1 + \cdots + y_n$ gerade.

Daraus folgt, dass

$$(x_1 + y_1) + \cdots + (x_n + y_n) = (x_1 + \cdots + x_n) + (y_1 + \cdots + y_n)$$

auch eine gerade Zahl ist. Damit ist aber auch

$$(x_1 \oplus y_1) + \cdots + (x_n \oplus y_n)$$

eine gerade Zahl, da $x_i + y_i$ genau dann gerade (ungerade) ist, wenn $x_i \oplus y_i$ gerade (ungerade) ist. Dies zeigt, dass $x + y$ in C liegt.

Ausserdem gilt für $x \in C$ und $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ (da $\odot$ genau dasselbe tut wie die Standardmultiplikation auf $\mathbb{Z}_2$)

$$(\alpha \odot x_1 + \cdots \alpha \odot x_n) = \alpha(x_1 + \cdots + x_n) = \begin{cases} x_1 + \cdots + x_n, & \text{für } \alpha = 1; \\ 0, & \text{für } \alpha = 0. \end{cases}$$

Da die rechte Seite in beiden Fällen eine gerade Zahl ist, gilt $\alpha \cdot x \in C$. Folglich ist C ein Untervektorraum.

Erklärung zur Bemerkung: Wir nehmen an, dass die Nachricht $x = (1011101)$ von einem Sender an einen Empfänger übermittelt werden soll. Geschieht das einfach so, kann der Empfänger schlecht beurteilen, ob die Übertragung korrekt funktioniert hat oder ob eines der ankommenden Bits fehlerhaft ist.
Um hier mehr Sicherheit zu erhalten, wird der Nachricht x hinten ein zusätzliches Bit angehängt, sodass das Resultat in C liegt, also dass die Summe der einzelnen Bits gerade ist. Die neue Nachricht lautet in unserem Fall also $x' = (1011101\mathbf{1})$. Erhält der Empfänger nun beispielsweise eine Nachricht mit ungerader Bitsumme, so weiss er, dass bei der Übertragung ein Fehler passiert sein muss und er kann die Wiederholung der Übermittlung veranlassen. Bei diesem Beispiel wird ein Fehler bei zwei Bits natürlich nicht mehr erkannt. Man kann aber k-fehlererkennende Codes finden für beliebige $k \in \mathbb{N}$, welche bei bis zu jeweils k fehlerhaften Bits “Alarm schlagen”. Diese sind jedoch aufwändiger, wodurch die Länge der Nachricht zunimmt und die Übertragung entsprechend länger dauert (und ebenso fehleranfälliger wird). Hier muss man - je nach Verwendungszweck - einen Kompromiss eingehen.