Serie 13: Semesterendtest

Dieser Test dient der Selbsteinschätzung. Einsendeschluss: Freitag, der 26. Januar um 14:00 Uhr.

---

1. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad B = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Für welche reellen Zahlen x_1 und x_2 gilt $B = A^{-1}$?

(a) $x_1 = 1,\ x_2 = 1.$

(b) $x_1 = -1,\ x_2 = 1.$

√ (c) $x_1 = 1,\ x_2 = -1.$

(d) $x_1 = -1,\ x_2 = -1.$

Das Produkt $AB = C = (c_{ij})$ muss gleich der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_3$ sein. Unter anderem muss also $c_{11} = 1$ sein. Dieser Eintrag ist das Produkt der ersten Zeile von A mit der ersten Spalte von B. Daraus folgt $x_1 = 1$. Genauso folgern wir, dass $c_{33} = 1$. Das Produkt der dritten Zeile von A mit der dritten Spalte von B liefert dann $x_2 = -1$. Für die Probe multipliziert man die beiden Matrizen und erhält als Produkt $AB = \mathbb{I}_3$.

2. Gegeben sei $Ax = b$, wobei

$$A = \left(a^{(1)} \dots a^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

$$b \in \mathbb{R}^m \text{ mit } b \notin \operatorname{span}\left\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\right\}.$$

Dann existiert keine Lösung von $Ax = b$.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Wenn $x = (x_1, ..., x_n)^T$ Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist, dann ist $x_1 a^{(1)} + ... + x_n a^{(n)} = b$. Um b als solche Linearkombination der Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(n)}$ darzustellen, muss aber $b \in \operatorname{span}\left\{a^{(1)}, ..., a^{(n)}\right\}$ gelten.

3. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis des Unterraums $\{x \mid Ax = 0\}$ ist gegeben durch...

$\checkmark$ (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Mit dem Gaussverfahren erhält man aus der Matrix A eine Zeilenstufenform wie die folgende:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher sind die Lösungen des Gleichungssystems $Ax = 0$ durch

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_3 - 2x_4 \\ x_1 &= \frac{1}{2}\left((x_3 + 2x_4) + x_3 - 2x_4\right) = x_3 \end{aligned}$$

gegeben, wobei x_3 und x_4 freie Parameter sind. Der Kern von A hat somit die Dimension 2.

Die Vektoren $(1, -1, 1, 0)^\top, (1, -3, 1, 1)^\top$ sind Lösungen von $Ax = 0$ und linear unabhängig, da der zweite kein Vielfaches vom ersten ist. Sie bilden daher eine Basis vom Kern von A.

Die zweite Antwort ist falsch, weil jede Basis vom Kern von A genau zwei Elemente hat.

Die dritte Antwort ist falsch, weil Vektoren im $\mathbb{R}^3$ nicht im Kern von A liegen können, sondern nur Vektoren im $\mathbb{R}^4$.

Die vierte Antwort ist falsch, weil $(1, 0, -1, 0)^\top$ keine Lösung von $Ax = 0$ ist.

4. Welche der folgenden drei Vektoren sind jeweils linear unabhängig?

$\checkmark$ (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$\checkmark$ (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$\checkmark$ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Über die lineare Unabhängigkeit von drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ drei entscheidet die Determinante der 3×3-Matrix, deren Spaltenvektoren die gegebenen Vektoren sind. Verschwindet diese nicht, sind die Vektoren linear unabhängig. Es ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 6.$$

Da es sich bei den weiteren Antwortalternativen nur um Vertauschungen der ersten drei handelt, ändert sich die Determinante nur bis auf ein Vorzeichen, verschwindet also nicht. Damit sind alle jeweils linear unabhängig.

5. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{F}$ der Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Addition

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Darin enthalten sind die Unterräume $\mathcal{P}_n(x) := \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ der Polynome mit Grad $\leq n$. Es gilt:

$\surd$ (a) Die Dimension des Unterraums $\mathcal{P}_n$ ist $n+1$.

Die Dimension ist höchstens $n+1$, denn die Polynome $1, x, x^2, \ldots, x^n$ erzeugen offensichtlich diesen Unterraum. Diese $n+1$ Polynome sind aber auch linear unabhängig, wie wir gleich zeigen, und damit ist die Dimension auch mindestens $n+1$; zusammen ergibt dies $\dim(\mathcal{P}_n) = n+1$. Nach Definition von linear unabhängig, ist zu zeigen: $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0 \; \forall x$ impliziert $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. Für $x \to \infty$ konvergiert $(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)/x^n$ gegen a_n und nach Voraussetzung auch gegen Null; also $a_n = 0$. Induktiv folgt, dass alle Koeffizienten verschwinden.

$\surd$ (b) Die Sinusfunktion ist Element von $\mathcal{F}$ ($\sin \in \mathcal{F}$), aber liegt in keinem der Unterräume $\mathcal{P}_n$ ($\sin \notin \mathcal{P}_n$).

Richtig. $\sin \in \mathcal{F}$ ist klar, denn Sinus ist eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Allerdings ist Sinus nicht als Polynom schreibbar (kein Polynom hat unendlich viele Nullstellen ausser dem Nullpolynom), also $\sin \notin \mathcal{P}_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Sinus und Cosinus sind linear abhängige Vektoren in $\mathcal{F}$.

Falsch, denn aus $\lambda \sin + \mu \cos \equiv 0$ folgt durch auswerten bei Null $\lambda \sin(0) + \mu \cos(0) = \mu = 0$ und durch auswerten bei $\pi/2$ genauso $\lambda = 0$. Damit haben wir aber gerade gezeigt, dass die beiden Vektoren linear unabhängig sind.

$\surd$ (d) $1, \sin^2, \cos^2$ sind linear abhängige Vektoren in $\mathcal{F}$.

Genau, denn $\sin^2 + \cos^2 \equiv 1$ bedeutet, dass sich 1 als Linearkombination von $\sin^2$ und $\cos^2$ schreiben lässt.

$\surd$ (e) Sind zwei Polynome $p(x), q(x)$ linear unabhängig, so auch die Polynome $xp(x), xq(x)$.

$\lambda\, xp(x) + \mu\, xq(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ impliziert (man dividiere durch x) $\lambda p(x) + \mu q(x) = 0 \; \forall x \neq 0$. Also hat das Polynom $\lambda p + \mu q$ unendlich viele Nullstellen und muss damit das Nullpolynom sein: $\lambda p + \mu q \equiv 0$. Nach Voraussetzung hat diese Gleichung nur die triviale Lösung $\lambda = \mu = 0$ und wir haben gezeigt: $xp(x), xq(x)$ sind linear unabhängig.

$\surd$ (f) Der Untervektorraum $V = \operatorname{span}\{\sin\}$ schneidet den Unterraum $\mathcal{P}_3$ nur in 0 (formal $V \cap \mathcal{P}_3 = \{0\}$) und es gilt $\dim(\operatorname{span}\{\sin, 1, x, x^2, x^3\}) = 5$.

Ein Element von V ist von der Form $\lambda \sin$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Wie in (b) folgert man, dass sich diese Funktion nur für $\lambda = 0$ als Polynom schreiben lässt. Damit haben V und $\mathcal{P}_3$ nur den Nullvektor gemeinsam. Die zweite Aussage ist ebenfalls richtig, denn $\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 x + \lambda_4 x^2 + \lambda_5 x^3 = 0 \;\; \forall x$ impliziert $\lambda_1 = 0$ (folgt aus dem ersten Teil der Aufgabe) und $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ folgt dann wie in (a). Damit haben wir 5 linear unabhängige Vektoren die also einen 5-dimensionalen Raum aufspannen.

√ (g) Die Abbildung $A\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}, f \mapsto f(1)$ ist linear.

Richtig: $\mathcal{F}(\alpha f + g) = [\alpha f + g](1) = \alpha f(1) + g(1) = \alpha\mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$.

6. Gegeben sei die 7×7-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

√ (a) A ist orthogonal.

(b) A ist nicht orthogonal.

Offensichtlich sind alle Spalten normiert. Die Spalten stehen auch orthogonal zueinander, denn das Skalarprodukt zweier Spalten ist Null, da sich die Einsen an verschiedenen Stellen befinden (das Produkt zweier Komponenten zweier verschiedener Spalten ist immer Null). Also ist A orthogonal. Dies gilt für alle Permutationsmatrizen.

7. Es seien $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$, $\mathbb{I}_n$ die $n \times n$-Einheitsmatrix, A eine $n \times n$–Matrix, $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren und es gelte

$$A^2 = 2\,\mathbb{I}_n \quad \text{und} \quad A\,u = v.$$

Dann folgt:

√ (a) Die Determinante von A ist entweder $-\sqrt{2^n}$ oder $\sqrt{2^n}$. Andere Werte sind nicht möglich.

Richtig, aus $A^2 = 2\mathbb{I}_n$ folgt $(\det A)^2 = \det(A^2) = \det(2\mathbb{I}_n) = 2^n$. Also erfüllt $\det A$ die quadratische Gleichung $x^2 = 2^n$.

√ (b) Das lineare Gleichungssystem $A\,x = u$ hat die Lösung $x = \frac{1}{2}\,v$.

Richtig, aus $Au = v$ folgt $A^2u = Av$ und mit $A^2u = 2u$ folgt $2u = Av$ oder $u = A(\frac{1}{2}v)$.

8. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) 0.

√ (b) −1.

(c) 2.

Entwicklung nach der ersten Spalte liefert $\det(A) = -1(2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = -1$.

9. Gegeben seien zwei Matrizen A und B aus $\mathbb{R}^{n \times n}$, mit $n > 1$.
Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Gegenbeispiel: $A = B = \mathbb{I}_n$. Dann ist $\det(A+B) = \det(2\mathbb{I}_n) = 2^n \neq \det(A)+\det(B) = \det(\mathbb{I}_n) + \det(\mathbb{I}_n) = 2$

√ (b) Es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Siehe Buch*, Satz 3.6, p.58.

√ (c) Aus $\det(A) \neq 0$ folgt, dass die Spaltenvektoren $a^{(1)}, \cdots, a^{(n)}$ von A linear unabhängig sind.

Siehe Buch, Korollar 3.12 auf p.63. Punkt *i)* ist äquivalent dazu, dass die Spaltenvektoren der $n \times n$-Matrix A linear unabhängig sind.

√ (d) Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$.

Beweis: mit Hilfe von Satz 3.6 im Buch auf p.58 haben wir: $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$.

(e) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

Nein, denn jedes Element in der Matrix A wird mit λ multipliziert. Siehe auch den letzten Punkt.

√ (f) Es gilt $\det(A) = \det(A^T)$, wobei A^T die Transponierte von A bezeichnet.

Siehe Buch, Satz 3.3 auf p.56.

√ (g) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Jedes Element in A wird mit λ multipliziert. Dabei kann man aus jeder Zeile von A einen Faktor λ aus der Determinante herausziehen. Da wir n Zeilen haben, folgt die Aussage.

* K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, vdf Hochschulverlag, 5. Auflage 2002