1 Multiple Choice Fragen (Wiederholung vom letzten Semester)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $f(a) \in \mathbb{R}$. Welche Aussage gilt für die Komposition $h := g \circ f$?

☐ h ist differenzierbar an der Stelle a und $h'(a) = g'(f(a)) + f'(a)$.

☐ h ist differenzierbar an der Stelle a und $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

☐ h ist *nicht* differenzierbar an der Stelle a, aber h ist stetig an der Stelle a.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $-\infty < a < b < \infty$. Nehmen Sie an dass $f(a) < f(b)$. Welche der folgenden Aussagen sind *möglich*?

☐ Es gibt einen Punkt $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ so, dass f *nicht* stetig in c ist.

☐ Für alle $x \in (a, b)$ gilt $f'(x) \leq 0$.

☐ Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ so, dass $f(c) > \max(f(a), f(b))$.

☐ Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ existiert *nicht*.

c) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $0 < a < \infty$. Nehmen Sie an, dass $f(0) = g(0) = 0$ und dass g' nirgendwo verschwindet auf $(0, a)$. Welche Aussagen sind wahr?

☐ $\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert und $\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

☐ Wenn $\lim_{x\downarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

☐ $\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert nicht.

d) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetigen Ableitungen. Nehmen Sie an, dass $f(0) = 0$, $g(1) = 0$ und $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [0, 1]$. Welche der folgenden Aussagen gilt?

☐ $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx$.

☐ Wenn $\int_0^1 g(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx$, dann gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [0, 1]$.

☐ $\int_0^1 f'(x)g(x)dx = -\int_0^1 f(x)g'(x)$.

2 Grenzwerte in mehreren Variablen

a) Sei f die Funktion, die durch $f(x, y) = \frac{y}{x-1}$ auf der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 1\}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y)$? Und wenn er existiert, was ist er gleich?

b) Sei f die Funktion, die auf der Menge $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ durch $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$? Und wenn er existiert, was ist er gleich?

c) Sei f die Funktion, die auf der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ durch $f(x,y) = \frac{(x-1)^2 \ln(x)}{(x-1)^2+y^2}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Und wenn er existiert, was ist er gleich?

d) Sei f die Funktion, die auf der Menge $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ durch $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Und wenn er existiert, was ist er gleich?

3 Stetigkeit in mehreren Variablen

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ist f stetig?

b) Sei $f(x,y) = \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ auf der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y > 0 \text{ und } x \neq y\}$ definiert. Lässt sich f stetig auf dem Gebiet $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0\}$ erweitern?

c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ist f stetig?

d) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x,y) = \begin{cases} x\sin(1/y), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

definiert. An welche Stellen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist g stetig?