1 Multiple Choice Fragen (Wiederholung vom letzten Semester)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $f(a) \in \mathbb{R}$. Welche Aussage gilt für die Komposition $h := g \circ f$?

☐ h ist differenzierbar an der Stelle a und $h'(a) = g'(f(a)) + f'(a)$.

☑ h ist differenzierbar an der Stelle a und $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

☐ h ist *nicht* differenzierbar an der Stelle a, aber h ist stetig an der Stelle a.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $-\infty < a < b < \infty$. Nehmen Sie an dass $f(a) < f(b)$. Welche der folgenden Aussagen sind *möglich*?

☐ Es gibt einen Punkt $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ so, dass f *nicht* stetig in c ist.

☐ Für alle $x \in (a, b)$ gilt $f'(x) \leq 0$.

☑ Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ so, dass $f(c) > \max(f(a), f(b))$.

☐ Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ existiert *nicht*.

c) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $0 < a < \infty$. Nehmen Sie an, dass $f(0) = g(0) = 0$ und dass g' nirgendwo verschwindet auf $(0, a)$. Welche Aussagen sind wahr?

☐ $\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert und $\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

☑ Wenn $\lim_{x\downarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

☐ $\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert nicht.

d) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetigen Ableitungen. Nehmen Sie an, dass $f(0) = 0$, $g(1) = 0$ und $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [0, 1]$. Welche der folgenden Aussagen gilt?

☑ $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx$.

☑ Wenn $\int_0^1 g(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx$, dann gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [0, 1]$.

☑ $\int_0^1 f'(x)g(x)dx = -\int_0^1 f(x)g'(x)$.

2 Grenzwerte in mehreren Variablen

a) Sei f die Funktion, die durch $f(x, y) = \frac{y}{x-1}$ auf der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 1\}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y)$? Und wenn er existiert, was ist er?

Lösung: Wir sehen, dass f auf der Linie $\{(x, y) \mid y = 0,\ x \neq 1\}$ verschwindet. Hätte also f einen Grenzwert für $(x, y) \to (1, 0)$, wäre dieser gleich 0. Aber, die Linie $y = x - 1$ geht durch $(1, 0)$ und auf dieser Linie ist f gleich 1. Also existiert $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y)$ nicht.

b) Sei f die Funktion, die auf der Menge $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ durch $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Und wenn er existiert, was ist er?

Lösung: Wir behaupten dass der Grenzwert nicht existiert. Noch ein Mal sehen wir, dass f auf der Linie $\{(x,y) \mid y = 0,\ x \neq 0\}$ verschwindet. Also hätten wir noch ein Mal $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ wenn er existieren würde. Aber für $y = x^2$ sehen wir dass

$$f(x,x^2) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$

Da die Parabel $\{(x,x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ durch $(0,0)$ geht, folgt unsere Behauptung.

Bemerken Sie bitte das Folgende in diesem Beispiel: Eine Linie durch den Punkt $(0,0)$ die ungleich $\{(x,y) \mid y = 0,\ x \neq 0\}$ ist, ist durch eine Gleichung der Form $x = ay$, für $a \in \mathbb{R}$ definiert. Auf so einer Linie haben wir

$$f(x,y) = f(ay,y) = \frac{a^2y^3}{a^4y^4+y^2} = \frac{a^2y}{a^4y^2+1} \xrightarrow{y\to 0} 0.$$

Somit sehen wir, dass wenn wir den Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nur geraden Linien entlang berechnet hätten, dann wäre unsere Schlussfolgerung, dass $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert hätte! Also sehen wir, dass Grenzwerte in $\mathbb{R}^n$ zu berechnen, im allgemeinen viel komplizierter ist als auf $\mathbb{R}$!

c) Sei f die Funktion, die auf der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ und } (x,y) \neq (1,0)\}$ durch $f(x,y) = \frac{(x-1)^2\ln(x)}{(x-1)^2+y^2}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Und wenn er existiert, was ist er?

Lösung: Wir sehen, dass für (x,y) mit $x > 0$ und $(x,y) \neq (1,0)$ gilt:

$$|f(x,y)| = \frac{|(x-1)^2|}{|(x-1)^2+y^2|}|\ln(x)| \leq |\ln(x)|.$$

Wegen $\lim_{x\to 1}\ln(x) = 0$ sehen wir, dass $0 \leq \lim_{(x,y)\to(1,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{x\to 1} |\ln(x)| = 0$ und damit auch $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 0$.

d) Sei f die Funktion, die auf der Menge $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ durch $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Und wenn er existiert, was ist er?

Lösung: Wir wissen, dass die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto \sin(t)$ stetig differenzierbar ist. Wir wissen auch, dass

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\sin(t) = \cos(0) = 1.$$

Von der Definition einer Ableitung folgt jetzt

$$\sin(s) = \sin(s) - \sin(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\sin(t)\cdot s + o(s) = s + o(s), \tag{1}$$

wobei $s \mapsto o(s)$ eine Funktion ist, die

$$\frac{o(s)}{s} \xrightarrow{s\to 0} 0 \tag{2}$$

erfüllt. In Polarkoordinaten können wir $(x, y) \neq (0, 0)$ als $x = r\cos(\theta)$ und $y = r\sin(\theta)$ schreiben. Da $x^2 + y^2 = r^2$ sehen wir, dass $f(x, y) = f(r) = \frac{\sin(r^2)}{r^2}$ unabhängig von θ ist. Somit haben wir $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} f(r)$ (wenn dieser existiert). Wegen (1) haben wir

$$f(r) = \frac{\sin(r^2)}{r^2} = \frac{r^2 + o(r^2)}{r^2} = 1 + \frac{o(r^2)}{r^2},$$

und (2) gibt nun

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} \left(1 + \frac{o(r^2)}{r^2}\right) = 1,$$

was unsere Aufgabe löst.

3 Stetigkeit in mehreren Variablen

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)y}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\} \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ist f stetig?

Lösung: Wir behaupten, dass f nicht stetig ist. Es reicht, wenn wir zeigen, dass $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ nicht existiert. Wir sehen dass f auf der Menge $\{(x, y) \mid y = 0,\ x \neq 0\}$ verschwindet. Hätte also f ein Grenzwert für $(x, y) \to (0, 0)$ müsste dieser gleich 0 sein. Anderseits sehen wir für $x = y$, dass

$$f(x, x) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

Da die Linie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ durch $(0, 0)$ geht folgt unsere Behauptung.

b) Sei $f(x, y) = \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ auf der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \text{ und } x \neq y\}$ definiert. Lässt sich f stetig auf das Gebiet $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$ erweitern?

Lösung: Wir sehen, dass für (x, y) mit $x, y > 0$ und $x \neq y$ gilt:

$$f(x, y) = \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = x(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

Somit lässt sich f stetig auf die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$ erweitern.

c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ist f stetig?

Lösung: Wir behaupten, dass f stetig ist. Dazu müssen wir zeigen, dass $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$. Schreiben wir $(x,y) \neq (0,0)$ in Polarkoordinaten haben wir $x = r\cos(\theta)$ und $y = r\sin(\theta)$. Also,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r^2 \\ x^3 + y^3 &= r^3(\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)) \end{aligned}$$

und $|f(r,\theta)| = |r(\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta))| \leq 2r$. Da $(x,y) \to (0,0)$ haben wir $r \downarrow 0$ und deswegen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{r\downarrow 0} |f(r,\theta)| = 0.$$

Unsere Behauptung folgt.

d) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x,y) = \begin{cases} x\sin(1/y), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

definiert. An welchen Stellen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist g stetig?

Lösung: Wir sehen sofort, dass g stetig ist an Stellen (x,y) mit $y \neq 0$. Wir sehen auch, dass g stetig an der Stelle $(0,0)$ ist: Wir haben

$$0 \leq |g(x,y)| \leq |x| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Also gilt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0)$ und unsere Behauptung folgt. Jetzt ist die Frage: Was passiert an den Stellen $(x,0)$ mit $x \neq 0$? Wir behaupten, dass g nicht stetig and solchen Stellen ist. Um das zu zeigen finden wir eine Folge (x_n, y_n) so dass $(x_n, y_n) \to (x,0)$ für $n \to \infty$ aber $g(x_n, y_n) \nrightarrow 0$ für $n \to \infty$. Z.B. können wir $(x_n, y_n) = (x, \frac{2}{(4n+1)\pi})$ wählen. Dann sehen wir, dass $(x_n, y_n) \to (x,0)$ für $n \to \infty$, aber

$$g(x_n, y_n) = x\sin(\tfrac{(4n+1)\pi}{2}) = x\sin(2n\pi + \tfrac{\pi}{2}) = x\sin(\tfrac{\pi}{2}) = x \neq 0$$

für alle n. Unsere Behauptung folgt.