1 Multiple Choice Fragen

a) Hat das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x)y \\ \cos(y)x \end{pmatrix}$$

ein Potential?

☐ Ja

☐ Nein

b) Sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld. Wie viele von den Ableitungen

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k}, \quad j,k \in \{1,\ldots,3\}$$

sind im Allgemeinen verschieden? Und wie viele wenn v konservativ ist?

☐ Im Allgemeinen gibt es 6 verschiedene Ableitungen. Wenn v konservativ ist, gibt es auch höchstens 6 verschiedene Ableitungen.

☐ Im Allgemeinen gibt es 9 verschiedene Ableitungen. Wenn v konservativ ist, gibt es höchstens 6 verschiedene Ableitungen.

☐ Egal ob v konservativ ist oder nicht, gibt es höchstens 9 verschiedene Ableitungen.

2 Potential

Betrachte das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

a) Sei $R > 0$ und betrachte $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$,

$$\gamma(t) = R \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass

$$\int_\gamma v \; d\gamma = 0.$$

b) Zeige durch Konstruktion eines Potentials, dass v konservativ ist.

3 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes

Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine C^2 Funktion und

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

zwei C^2 Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$.
Der *Gradient* von f ist das Vektorfeld $\nabla f := \nabla f$.
Die *Rotation* von v ist das Vektorfeld $\mathrm{rot}(v) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das durch

$$\mathrm{rot}(v) := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

definiert ist.
Die *Divergenz* von v ist die Funktion $\mathrm{div}(v) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die durch

$$\mathrm{div}(v) := \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

definiert ist.

a) Berechne die Divergenz und die Rotation des Vektorfeldes

$$v(x, y, z) = (\, y^2 x - xyz \,,\, yx + z^2 \,,\, x^2 + y^2 + z^2).$$

Beweise folgende koordinatenfreie Identitäten:

b) $\mathrm{div}(fv) = \ \nabla f \cdot v + f \cdot \mathrm{div}(v)$, wobei $fv : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld bezeichnet, welches durch
$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \cdot v(x, y, z)$$
gegeben ist.

c) $\mathrm{div}(v \times w) = w \cdot \mathrm{rot}(v) - \mathrm{rot}(w) \cdot v$,

d) $\mathrm{rot}(\nabla f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

e) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, v) = 0$,

f) $\mathrm{div}(f \cdot \mathrm{rot}\, v) = \nabla f \cdot \mathrm{rot}(v)$.

4 Extremalwerte

Sei $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ die geschlossene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = 3x + 2(x^2 + y^2)$$

definiert. Ein Durchmesser d ist eine gerade Linie in B die durch den Ursprung geht (siehe Figur 1). Bestimmen Sie die maximale Schwankung von f auf irgendeinem Durchmesser d. Gemeint ist das Maximum über alle d der Grösse

$$|\Delta f|_d := \max_{(x,y)\in d} f(x, y) - \min_{(x,y)\in d} f(x, y).$$

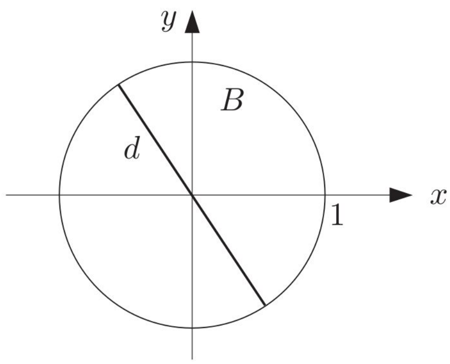

Figure 1: Ein Durchmesser

TIPP: Jeder Durchmesser lässt sich als $d(t) := \{(s\cos(t), s\sin(t)) \mid s \in [-1, 1]\}$, für ein $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, schreiben. Zunächst muss man $|\Delta f|_{d(t)}$ bestimmen. Dies gibt eine Funktion $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \ni t \mapsto |\Delta f|_{d(t)}$. Nun muss man das Maximum dieser Funktion bestimmen.

Eine englische Version dieser Übungsserie finden Sie auf der nächsten Seite

1 Multiple Choice Questions

a) Does the vectorfield $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x)y \\ \cos(y)x \end{pmatrix}$$

have a potential?

- ☐ Yes
- ☐ No

b) Let $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be a C^1-vectorfield. How many of the derivatives

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k}, \quad j,k \in \{1,\dots,3\}$$

are in general different? And how many when v is conservative?

- ☐ In general there are 6 different derivatives. If v is conservative then there are at most 6 different derivatives.
- ☐ In general there are 9 different derivatives. If v is conservative there are at most 6 different derivatives.
- ☐ No matter if v is conservative or not, there are at most 9 different derivatives.

2 Potential

Consider the vectorfield $v : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

a) Let $R > 0$ and consider $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$,

$$\gamma(t) = R \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Prove that

$$\int_\gamma v \; d\gamma = 0.$$

b) Show via construction of a potential, that v is conservative.

3 Divergence and Curl of a vectorfield

Let $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ be a C^2-function and

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

two C^2-vectorfield on $\mathbb{R}^3$.
The *gradient* of f is the vectorfield $\nabla f := \nabla f$.
The *curl* of v is the vectorfield $\operatorname{curl}(v) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ given by

$$\operatorname{curl}(v) := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

The divergence of v is the function $\operatorname{div}(v) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ given by

$$\operatorname{div}(v) := \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

a) Compute the divergence and the curl of the vectorfield

$$v(x, y, z) = (\, y^2 x - xyz \,,\, yx + z^2 \,,\, x^2 + y^2 + z^2).$$

Prove the following coordinate free identities:

b) $\operatorname{div}(fv) = \ \nabla f \cdot v + f \cdot \operatorname{div}(v)$, where $fv : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is the vectorfield given by

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \cdot v(x, y, z).$$

c) $\operatorname{div}(v \times w) = w \cdot \operatorname{curl}(v) - \operatorname{curl}(w) \cdot v$,

d) $\operatorname{curl}(\nabla f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

e) $\operatorname{div}(\operatorname{curl} v) = 0$,

f) $\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{curl} v) = \nabla f \cdot \operatorname{curl}(v)$.

4 Extremal values

Let $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ be the closed unit disc in $\mathbb{R}^2$. Define $f : B \to \mathbb{R}$ by

$$f(x, y) = 3x + 2(x^2 + y^2).$$

A diameter d is a straight line in B which goes through the origin (see Figure 2). Determine the maximal oscillation of f on any diameter in B. By this we mean the maximum over all diameters d of the quantity

$$|\Delta f|_d := \max_{(x,y) \in d} f(x, y) - \min_{(x,y) \in d} f(x, y).$$

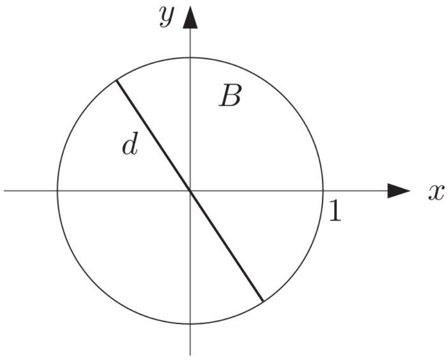

Figure 2: A diameter

Hint: Ever diameter can be written as $d(t) := \{(s\cos(t), s\sin(t)) \mid s \in [-1,1]\}$, for some $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. First one needs to compute $|\Delta f|_{d(t)}$. This determines a function $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \ni t \mapsto |\Delta f|_{d(t)}$. Now one has to determine the maximum of this function.