1 Multiple Choice Fragen

a) Hat das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x)y \\ \cos(y)x \end{pmatrix}$$

ein Potential?

☐ Ja

☑ Nein

Lösung: Da $\mathbb{R}^2$ konvex ist und v mindestens C^1 ist, wissen wir aus der Vorlesung, dass v ein Potential hat genau dann, wenn

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,y) \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Wir haben

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y) = \sin(x) \quad \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,y) = \cos(y).$$

Insbesonders gilt

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}(0,0) = \sin(0) = 0 \neq 1 = \cos(0) = \frac{\partial v_2}{\partial x}(0,0).$$

Daraus folgt die Behauptung.

b) Sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld. Wie viele von den Ableitungen

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k}, \quad j,k \in \{1,\dots,3\}$$

sind im Allgemeinen verschieden? Und wie viele wenn v konservativ ist?

☐ Im Allgemeinen gibt es 6 verschiedene Ableitungen. Wenn v konservativ ist, gibt es auch höchstens 6 verschiedene Ableitungen.

☑ Im Allgemeinen gibt es 9 verschiedene Ableitungen. Wenn v konservativ ist, gibt es höchstens 6 verschiedene Ableitungen.

Lösung: Im Allgemeinen sind alle Ableitungen verschieden. Da es insegsamt 9 Ableitungen gibt, gibt es also 9 verschiedene Ableitungen im Allgemeinen. Wenn v konservativ ist, wissen wir aus der Vorlesung, dass $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ für alle $i,k \in \{1,2,3\}$. Somit sind höchstens 6 Ableitungen verschieden.

☐ Egal ob v konservativ ist oder nicht, gibt es höchstens 9 verschiedene Ableitungen.

2 Potential

Betrachte das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

a) Sei $R > 0$ und betrachte $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$,

$$\gamma(t) = R \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass

$$\int_\gamma v \; d\gamma = 0.$$

Lösung: Wir haben

$$\gamma'(t) = R \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \quad v(\gamma(t)) = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} -2\cos(t)\sin(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{pmatrix},$$

und somit

$$\begin{aligned} v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= \frac{1}{R}(2\cos(t)\sin^2(t) + \cos^3(t) - \cos(t)\sin^2(t)) \\ &= \frac{\cos(t)}{R}(2\sin^2(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t)) = \frac{\cos(t)}{R}. \end{aligned}$$

Nun folgt

$$\int_\gamma v \; d\gamma = \int_0^{2\pi} v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \; dt = \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \cos(t) \; dt = \frac{1}{R} [\sin(t)]_{t=0}^{2\pi} = \frac{0-0}{R} = 0,$$

was die Teilaufgabe löst.

b) Zeige durch Konstruktion eines Potentials, dass v konservativ ist.

Lösung: Die Aufgabe besteht darin, eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu finden, so dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}. \tag{1}$$

Wenn f eine Funktion ist, die diese Bedingungen erfüllt, dann gilt für $y \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,y) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(t,y) dt = f(0,y) - y \int_0^x \frac{2t}{(t^2+y^2)^2} dt \\ &\overset{u=t^2+y^2}{=} f(0,y) - y \int_{y^2}^{x^2+y^2} \frac{1}{u^2} du = f(0,y) + y[u^{-1}]_{u=y^2}^{x^2+y^2} \\ &= f(0,y) + \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y}{y^2} = f(0,y) + \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{1}{y} \\ &= g(y) + \frac{y}{x^2+y^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $g(y) = f(0,y) - \frac{1}{y}$. Wenn wir (2) in y ableiten, bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= g'(y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = g'(y) + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= g'(y) + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = g'(y) + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Wenn wir dies mit (1) vergleichen, sehen wir, dass

$$g'(y) \equiv 0$$

sein muss. Also, dass

$$f(0,y) = \frac{1}{y} + c \quad \forall\, y \neq 0$$

für eine Konstante c. Setzen wir $c = 0$, haben wir $g \equiv 0$ und (2) und (3) geben in diesem Fall, dass

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

ein Potential für v ist.

3 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes

Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine C^2 Funktion und

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

zwei C^2 Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$.
Der *Gradient* von f ist das Vektorfeld $\nabla f := \nabla f$.
Die *Rotation* von v ist das Vektorfeld $\operatorname{rot}(v) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das durch

$$\operatorname{rot}(v) := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

definiert ist.
Die *Divergenz* von v ist die Funktion $\operatorname{div}(v) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die durch

$$\operatorname{div}(v) := \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

definiert ist.

a) Berechne die Divergenz und die Rotation des Vektorfeldes

$$v(x,y,z) = (\, y^2x - xyz \,,\, yx + z^2 \,,\, x^2 + y^2 + z^2).$$

Lösung: Die Definition oben gibt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(v) &= \frac{\partial(y^2x - xyz)}{\partial x} + \frac{\partial(yx + z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial z} \\
&= y^2 - yz + x + 2z \\
\operatorname{rot}(v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(yx+z^2)}{\partial z} \\ \frac{\partial(y^2x-xyz)}{\partial z} - \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x} \\ \frac{\partial(yx+z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2x-xyz)}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2y - 2z \\ -xy - 2x \\ y - 2yx + xz \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beweise folgende koordinatenfreie Identitäten:

b) $\operatorname{div}(fv) = \nabla f \cdot v + f \cdot \operatorname{div}(v)$, wobei $fv : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld bezeichnet, welches durch

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \cdot v(x, y, z)$$

gegeben ist.

Lösung: Um die Notation zu erleichtern, schreiben wir $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ und $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$. Wir leiten nun ab:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(fv) &= \partial_x(fv_1) + \partial_y(fv_2) + \partial_z(fv_3) \\
&= (\partial_x f) \cdot v_1 + f \cdot (\partial_x v_1) + (\partial_y f) \cdot v_2 + f \cdot (\partial_y v_2) + (\partial_z f) \cdot v_3 + f \cdot (\partial_z v_3) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + f \cdot (\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) \\
&= \nabla f \cdot v + f \cdot \operatorname{div}(v).
\end{aligned}$$

c) $\operatorname{div}(v \times w) = w \cdot \operatorname{rot}(v) - \operatorname{rot}(w) \cdot v$,

Lösung: Durch Anwenden der Definition der Divergenz und der Produktregel für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(v \times w) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} \\
&= \partial_x(v_2w_3 - v_3w_2) + \partial_y(v_3w_1 - v_1w_3) + \partial_z(v_1w_2 - v_2w_1) \\
&= v_2\partial_x w_3 - v_3\partial_x w_2 + w_3\partial_x v_2 - w_2\partial_x v_3 + v_3\partial_y w_1 - v_1\partial_y w_3 \\
&\quad + w_1\partial_y v_3 - w_3\partial_y v_1 + v_1\partial_z w_2 - v_2\partial_z w_1 + v_2\partial_z v_1 - w_1\partial_z v_2 \\
&= -v_1(\partial_y w_3 - \partial_z w_2) + w_1(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) - v_2(\partial_z w_1 - \partial_x w_3) \\
&\quad + w_2(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) - v_3(\partial_x w_2 - \partial_y w_1) + w_3(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) \\
&= -v \cdot \operatorname{rot}(w) + w \cdot \operatorname{rot}(v) \\
&= w \cdot \operatorname{rot}(v) - v \cdot \operatorname{rot}(w).
\end{aligned}$$

d) $\operatorname{rot}(\nabla f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

Lösung: Durch Anwenden der Definition der Rotation und des Gradienten sowie der Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z f - \partial_z \partial_y f \\ \partial_z \partial_x f - \partial_x \partial_z \\ \partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

e) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$,

Lösung: Durch Anwenden der Definitionen der Divergenz und der Rotation sowie der Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} v) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} \\ &= \partial_x \partial_y v_3 - \partial_x \partial_z v_2 + \partial_y \partial_z v_1 - \partial_y \partial_x v_3 + \partial_z \partial_x v_2 - \partial_z \partial_y v_1 = 0. \end{aligned}$$

f) $\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{rot} v) = \nabla f \cdot \operatorname{rot}(v)$.

Lösung: Durch Anwenden der Resultate aus den Teilaufgaben a) und d) erhalten wir

$$\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{rot} v) \overset{\text{b)}}{=} \nabla f \cdot \operatorname{rot} v + f \cdot \operatorname{div}(\operatorname{rot} v) \overset{\text{e)}}{=} \nabla f \cdot \operatorname{rot}(v).$$

4 Extremalwerte

Sei $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ die geschlossene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = 3x + 2(x^2 + y^2)$$

definiert. Ein Durchmesser d ist eine gerade Linie in B die durch den Ursprung geht (siehe Figur 1). Bestimmen Sie die maximale Schwankung von f auf irgendeinem Durchmesser d. Gemeint ist das Maximum über alle d der Grösse

$$|\Delta f|_d := \max_{(x,y)\in d} f(x, y) - \min_{(x,y)\in d} f(x, y).$$

TIPP: Jeder Durchmesser lässt sich als $d(t) := \{(s\cos(t), s\sin(t)) \mid s \in [-1, 1]\}$, für ein $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, schreiben. Zunächst muss man $|\Delta f|_{d(t)}$ bestimmen. Dies gibt eine Funktion $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \ni t \mapsto |\Delta f|_{d(t)}$. Nun muss man das Maximum dieser Funktion bestimmen.

Lösung: Für jeden Durchmesser d in B gibt es ein $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, so dass

$$d = d(t) := \{(s\cos(t), s\sin(t)) \in B \mid s \in [-1, 1]\}.$$

Wir müssen nun $|\Delta f|_{d(t)}$ bestimmen. Das heisst, wir müssen die Extrema der Funktion $[-1, 1] \ni s \mapsto \phi(s) := f(s\cos(t), s\sin(t))$ bestimmen. Wir haben

$$\phi(s) = f(s\cos(t), s\sin(t)) = 3s\cos(t) + 2(s^2\cos^2(t) + s^2\sin^2(t)) = 3s\cos(t) + 2s^2,$$

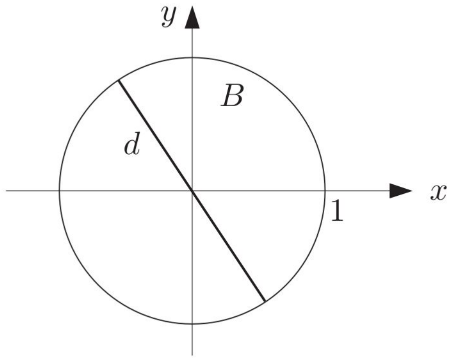

Figure 1: Ein Durchmesser

was eine glatte Funktion in s ist. Nun haben wir

$$\phi'(s) = 3\cos(t) + 4s \tag{4}$$
$$\phi''(s) = 4 > 0 \tag{5}$$

und somit hat $(-1,1) \ni s \mapsto \phi(s)$ nur einen kritischen Punkt $s_* = \frac{-3\cos(t)}{4}$ und wegen (5) ist s_* ein lokales Minimum für ϕ. Wir behaupten, dass s_* ein globales Minimum ist. Aus (4) folgt, dass $\phi'(s) \leq 0$ für alle $s \in [-1, s_*]$ und somit gilt

$$\phi(s_*) - \phi(s) = \int_s^{s_*} \phi'(x)dx \leq 0 \Rightarrow \phi(s_*) \leq \phi(s)$$

für alle solchen s. Auf der andere Seite gibt (4) auch, dass $\phi'(s) \geq 0$ für alle $s \in [s_*, 1]$, was $\phi(s_*) \leq \phi(s)$ für alle solche s erfordert. Dies zeigt die Behauptung und

$$\begin{aligned}\min_{d(t)}(f) &= \min_{s\in[-1,1]} \phi(s) = \phi(s_*) = f\left(\tfrac{-3\cos^2(t)}{4}, \tfrac{-3\cos(t)\sin(t)}{4}\right)\\ &= \frac{-9\cos^2(t)}{4} + 2\left(\frac{9\cos^4(t)}{16} + \frac{9\cos^2(t)\sin^2(t)}{16}\right)\\ &= \frac{-36\cos^2(t)}{16} + \frac{18\cos^2(t)}{16} = -\frac{9\cos^2(t)}{8}.\end{aligned}$$

Da s_* der einzige kritische Punkt für ϕ ist, nimmt sie ihr Maximum am Rand an. Da

$$\phi(-1) = f(-\cos(t), -\sin(t)) = -3\cos(t)+2 \quad \text{und} \quad \phi(1) = f(\cos(t), \sin(t)) = 3\cos(t)+2$$

und $\cos(t) \geq 0$ für alle $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, haben wir

$$\max_{d(t)}(f) = \max_{s\in[-1,1]} \phi(s) = 3\cos(t) + 2$$

und somit folgt, dass

$$|\Delta f|_{d(t)} = 3\cos(t) + 2 + \frac{9\cos^2(t)}{8}.$$

Da t durch das Interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ läuft, läuft $x := \cos(t)$ durch das Interval $[0,1]$ und somit sieht man, dass

$$\max_{t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} |\Delta f|_{d(t)} = \max_{x\in[0,1]}(3x + 2 + \tfrac{9}{8}x^2).$$

Für das Polynom $p(x) = 3x + 2 + \frac{9}{8}x^2$ gilt $p'(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$ und somit haben wir $\max_{x\in[0,1]} p(x) = p(1)$, was

$$\max_{t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} |\Delta f|_{d(t)} = \max_{x\in[0,1]}(3x + 2 + \tfrac{9}{8}x^2) = 3 + 2 + \tfrac{9}{8} = \tfrac{49}{8}$$

erfordert. Dies löst die Übung.