1 Multiple Choice Fragen

a) Welche der folgenden Interpretationen vom Integral $I := \int\int_B dA$ für $B \subset \mathbb{R}^2$ sind korrekt?

- ☐ I ist immer gleich 0.
- ☐ I ist der Flächeninhalt von B
- ☐ I ist das Volumen eines Zylinders der höhe 1 über B.
- ☐ I hat keine geometrische Interpretation, weil die Funktion $f(x, y)$ fehlt.

b) Das Vektorfelt $v : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

ist konstant in Länge und Richtung auf dem Einheitskreis.

- ☐ Wahr
- ☐ Falsch

2 Integration I

Bestimmen von Integrationsgrenzen: Schreibe für die folgenden Bereiche Ω die Integrale $\int_\Omega f(x, y) d\mu$ jeweils als iterierte eindimensionale Integrale (oder als Summe von solchen), wobei du

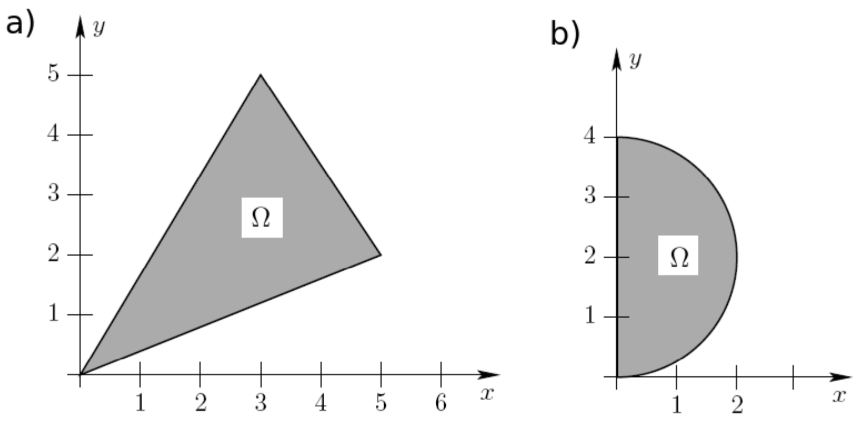

Abbildung 1: Bereiche

a) zuerst nach x und dann nach y integrierst,

b) zuerst nach y und dann nach x integrierst.

3 Integration II

Berechnen Sie zunächst die folgenden Doppelintegrale. Danach, berechnen Sie die Integrale noch einmal nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Anpassung der Integrationsgrenzen nach dem Satz von Fubini.

a)
$$\int_0^1 \int_0^x e^{x+y}\, dy\, dx,$$

b)
$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 x \cos y\, dx\, dy.$$

4 Integration III

Tauschen Sie die Integrationsgrenzen um und berechnen Sie das Integral.
TIPP: Es hilft wenn man das Integrationsgebiet zeichnet.

a)
$$\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin(y)}{y}\, dy\, dx$$

b)
$$\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\, dy\, dx$$

c)
$$\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin(xy)\, dy\, dx$$

d)
$$\int_0^{2\sqrt{\log(3)}} \int_{y/2}^{\sqrt{\log(3)}} e^{x^2}\, dx\, dy$$

5 Potential

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ der Weg $\gamma(t) = (t^3, t^2 + t, t)$ von $\gamma(0) = (0,0,0)$ nach $\gamma(1) = (1,2,1)$. Berechne für die folgenden Vektorfelder $v(x,y,z)$ das Integral

$$\int_{\gamma} v\, d\gamma$$

und untersuche, ob die Vektorfelder ein Potential besitzen (falls ja, berechne es).

a) $v(x,y,z) = (2xy^3, 3x^2y^2 + 2yz, y^2)$

b) $v(x,y,z) = (x+z, x+y+z, x+z)$.

Eine englische Version dieser Übungsserie finden Sie auf der nächsten Seite

1 Multiple Choice Questions

a) Which of the following interpretations of the integral $I := \int\int_B dA$ for some subset $B \subset \mathbb{R}^2$ are correct?

- ☐ I always equals 0.
- ☐ I is the surface area of B
- ☐ I is the volume of a cylinder of height 1 over B.
- ☐ I does not have any geometric intepretation because there is no function $f(x, y)$.

b) The vectorfield $v : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

is constant in length and direction on the unit circle.

- ☐ True
- ☐ False

2 Integration I

Determine the integration limits: Write for the following domains Ω the integral $\int_\Omega f(x, y) d\mu$ as an itterated one-dimensional integrals (or sums of such), where you

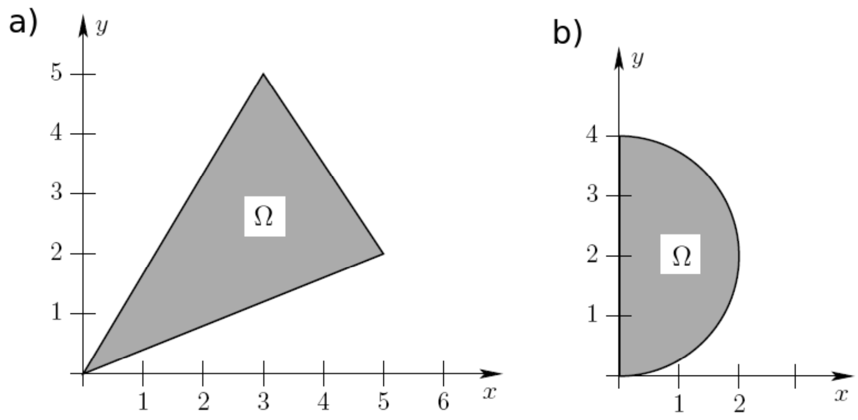

Abbildung 2: Bereiche

a) first integrate with respect to x and then with respect to y,

b) first integrate with respect to y and then with respect to x.

3 Integration II

Compute first the following double integrals. Then compute the integral again after switching the order of integration and adjusting the integration limits according the the theorem of Fubini.

a)

$$\int_0^1 \int_0^x e^{x+y}\, dy\, dx,$$

b)

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 x \cos y\ dx\, dy.$$

4 Integration III

Switch the order of integration and compute the resulting integrals.
HINT: To determine the integration limits it helps if you draw the domain of integration.

a)

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin(y)}{y}\ dy\, dx$$

b)

$$\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\ dy\, dx$$

c)

$$\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin(xy)\ dy\, dx$$

d)

$$\int_0^{2\sqrt{\log(3)}} \int_{y/2}^{\sqrt{\log(3)}} e^{x^2}\ dx\, dy$$

5 Potential

Let $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ be the path $\gamma(t) = (t^3, t^2+t, t)$ from $\gamma(0) = (0,0,0)$ to $\gamma(1) = (1,2,1)$. Compute the following vectorfields $v(x,y,z)$ the path integral

$$\int_\gamma v\ d\gamma$$

and investigate if the vectorfields have a potential or not (if "yes", then compute it).

a) $v(x,y,z) = (2xy^3, 3x^2y^2 + 2yz, y^2)$

b) $v(x,y,z) = (x+z, x+y+z, x+z)$.