1 Multiple Choice Fragen

a) Welche der folgenden Interpretationen vom Integral $I := \int\int_B dA$ für $B \subset \mathbb{R}^2$ sind korrekt?

- ☐ I ist immer gleich 0.
- ☑ I ist der Flächeninhalt von B
- ☑ I ist das Volumen eines Zylinders der höhe 1 über B.
- ☐ I hat keine geometrische Interpretation, weil die Funktion $f(x, y)$ fehlt.

b) Das Vektorfelt $v : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

ist konstant in Länge und Richtung auf dem Einheitskreis.

- ☐ Wahr
- ☑ Falsch

Lösung: Wir sehen, dass

$$|v(x, y)| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$$

und somit ist die Länge konstant überall. Aber die Richtung entlang dem Einheitskreis ist nicht konstant. ZB haben wir

$$v(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v(1, 0).$$

2 Integration I

Bestimmen von Integrationsgrenzen: Schreibe für die folgenden Bereiche Ω die Integrale $\int_\Omega f(x, y) d\mu$ jeweils als iterierte eindimensionale Integrale (oder als Summe von solchen), wobei du

a) zuerst nach x und dann nach y integrierst,

b) zuerst nach y und dann nach x integrierst.

Lösung: Zunächst lösen wir die Aufgaben für den linke Bereich Ω in Abbildung 1. Wir bestimmen zuerst die Geradengleichungen von g_1, g_2 und g_3, für i) in der Form $x = f(y)$ und für ii) in der Form $y = f(x)$.

$$\begin{aligned}
g_1 : \quad & y = \tfrac{2}{5}x & \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}y \\
g_2 : \quad & y = \tfrac{5}{3}x & \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}y \\
g_3 : \quad & y = -\tfrac{3}{2}x + \tfrac{19}{2} & \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}y + \frac{19}{3}
\end{aligned}$$

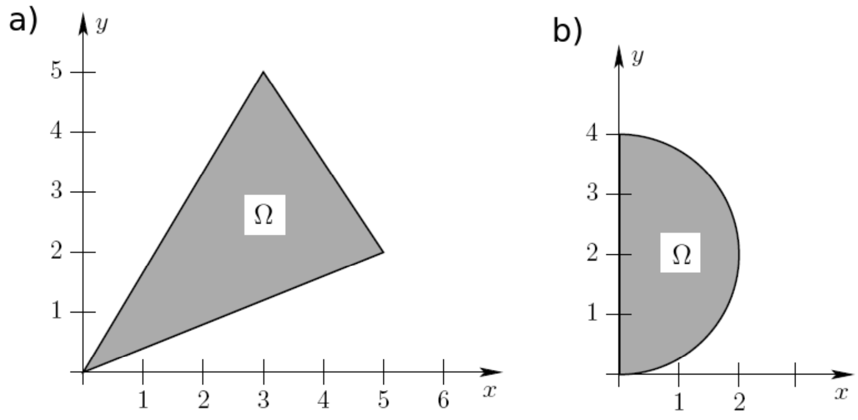


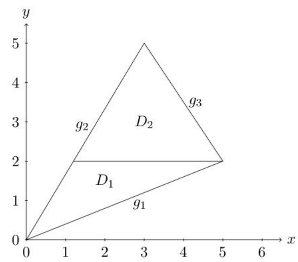
Abbildung 1: Bereiche

i)

Bei Integration zuerst nach x, dann nach y müssen wir für jedes y den entsprechenden Bereich für x in der Form

$$\phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)$$

schreiben. Dazu teilen wir das Gebiet in D_1 und D_2 auf und benutzen



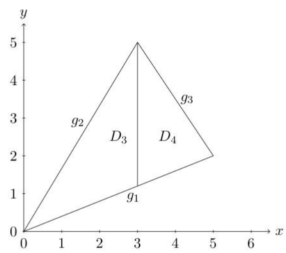
$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) :\ 0 \leq y \leq 2, \quad \frac{3}{5}y \leq x \leq \frac{5}{2}y\} \\ D_2 &= \{(x,y) :\ 2 \leq y \leq 5, \quad \frac{3}{5}y \leq x \leq \frac{19}{3} - \frac{2}{3}y\}. \end{aligned}$$

Also

$$\int_\Omega f(x,y)d\mu = \int_0^2 \int_{\frac{3}{5}y}^{\frac{5}{2}y} f(x,y)dx\,dy + \int_2^5 \int_{\frac{3}{5}y}^{\frac{19}{3}-\frac{2}{3}y} f(x,y)dx\,dy$$

ii)

Hier teilen wir auf in D_3, D_4



$$D_3 = \{(x,y) :\ 0 \leq x \leq 3,\ \frac{2}{5}x \leq y \leq \frac{5}{3}x\}$$
$$D_4 = \{(x,y) :\ 3 \leq x \leq 5,\ \frac{2}{5}x \leq y \leq \frac{19}{2} - \frac{3}{2}x\}$$

Also

$$\int f(x,y)d\mu = \int_0^3 \int_{\frac{2}{5}x}^{\frac{5}{3}x} f(x,y)dydx + \int_3^5 \int_{\frac{2}{5}x}^{\frac{19}{2}-\frac{3}{2}x} f(x,y)dydx.$$

Nun betrachten wir der rechte Bereich Ω in Abbildug 1. Der Kreis hat die Gleichung

$$x^2 + (y-2)^2 = 2^2 = 4.$$

i) Damit ist der rechte Halbkreis gegeben durch die Gleichung

$$x = \sqrt{4-(y-2)^2}$$

und wir haben

$$\int f(x,y)d\mu = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-(y-2)^2}} f(x,y)dxdy.$$

ii) Der untere Viertelkreis ist bestimmt durch

$$y-2 = -\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow y = 2-\sqrt{4-x^2}$$

der obere durch

$$y = 2+\sqrt{4-x^2}.$$

Also ist

$$\int_\Omega f(x,y)d\mu = \int_0^2 \int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx.$$

3 Integration II

Berechnen Sie zunächst die folgenden Doppelintegrale. Danach, berechnen Sie die Integrale noch einmal nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Anpassung der Integrationsgrenzen nach dem Satz von Fubini.

a)

$$\int_0^1 \int_0^x e^{x+y}\, dy\, dx,$$

Lösung:

$$\int_0^1 \int_0^x e^{x+y}\, dy\, dx = \int_0^1 e^x \int_0^x e^y\, dy\, dx = \int_0^1 e^x(e^x-1)\, dx = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}.$$

Der Integrationsbereich ist ein Dreieck, das von der x-Achse und den Geraden $x=1, x=y$ eingeschlossen wird. Vertauscht man die Integration erhält man daher die Integrationsgrenzen wie folgt

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x+y}\, dy\, dx = \int_0^1 e^y(e-e^y)\, dy = \int_0^1 e^{y+1} - e^{2y}\, dy = [e^{y+1} - \frac{1}{2}e^{2y}]_0^1$$
$$= e^2 - e^2/2 - e + 1/2 = e^2/2 - e + 1/2.$$

b)

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 x \cos y \; dx \, dy.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 x \cos y \; dx \, dy &= \int_0^1 \frac{1}{2}(\cos y - y \cos y) \; dy \\
&= \frac{1}{2}\left([\sin y]_0^1 - [y \sin y]_0^1 + \int_0^1 \sin x \; dx \right) \\
&= \frac{1}{2}\left([\sin y]_0^1 - [y \sin y]_0^1 - [\cos x]_0^1 \right) \\
&= \frac{1}{2}(\sin 1 - \sin 1 - \cos 1 + 1) \\
&= 1/2 - (\cos 1)/2.
\end{aligned}$$

In diesem Fall ist der Integrationsbereich der Bereich zwischen dem Graphen der Wurzelfunktion $x = \sqrt{y}$ und der Achse $x = 1$. Dreht man die Integration um, erhält man den Bereich zwischen x-Achse (die ist durch $y = 0$ beschreibt) und einer Parabel $y = x^2$, also

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} x \cos y \; dy \, dx = \int_0^1 x \sin(x^2) \; dx = -\frac{1}{2}[\cos(x^2)]_0^1 = -\frac{1}{2}\cos 1 + \frac{1}{2}.$$

4 Integration III

Tauschen Sie die Integrationsgrenzen um und berechnen Sie das Integral.

a)

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin(y)}{y} \; dy \, dx$$

Lösung: Die Grenzen sind $0 \leq x \leq y \leq \pi$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin(y)}{y} \; dy \, dx &= \int_0^\pi \int_0^y \frac{\sin(y)}{y} \; dx \, dy = \int_0^\pi \frac{\sin(y)}{y} \int_0^y 1 \; dx \, dy \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin(y) y}{y} \, dy = \int_0^\pi \sin(y) \, dy = [-\cos(y)]_{y=0}^\pi \\
&= 1 + 1 = 2
\end{aligned}$$

b)

$$\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3} \; dy \, dx$$

Lösung: Die Grenzen sind

$$0 \leq x \leq 3 \quad \text{und} \quad \sqrt{x/3} \leq y \leq 1.$$

Wegen der ersten Bedingung können wir die zweite als

$$x/3 = |x|/3 \leq y^2 \leq 1, \text{ oder } x \leq 3y^2 \leq 3$$

schreiben. Somit können wir unsere Grenzen als

$$0 \leq y \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq x \leq 3y^2$$

schreiben. Nun folgt, dass

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\ dy\, dx &= \int_0^1 \int_0^{3y^2} e^{y^3}\ dx\, dy = \int_0^1 e^{y^3} 3y^2\ dy = \left[e^{y^3}\right]_{y=0}^1 \\ &= e-1\end{aligned}$$

c)

$$\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin(xy)\ dy\, dx$$

Lösung: Die Grenzen sind

$$0 \leq x \leq y \leq 2.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin(xy)\ dy\, dx &= \int_0^2 2y \int_0^y y \sin(xy)\ dx\, dy = \int_0^2 2y[-\cos(xy)]_{x=0}^y\, dy \\ &= \int_0^2 2y(1-\cos(y^2))\, dy = \int_0^2 2y\, dy - \int_0^2 2y\cos(y^2)\, dy \\ &= [y^2]_0^2 - [\sin(y^2)]_0^2 = 4 - (\sin(4) - \sin(0)) = 4 - \sin(4).\end{aligned}$$

d)

$$\int_0^{2\sqrt{\log(3)}} \int_{y/2}^{\sqrt{\log(3)}} e^{x^2}\ dx\, dy$$

Lösung: Unsere Grenzen sind

$$\frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{\log(3)} \quad \text{und} \quad 0 \leq y \leq 2\sqrt{\log(3)}.$$

Diese können wir auch als

$$0 \leq y \leq 2x \quad \text{und} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{\log(3)}$$

schreiben. Somit haben wir

$$\begin{aligned}\int_0^{2\sqrt{\log(3)}} \int_{y/2}^{\sqrt{\log(3)}} e^{x^2}\ dx\, dy &= \int_0^{\sqrt{\log(3)}} \int_0^{2x} e^{x^2}\ dy\, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{\log(3)}} e^{x^2} \int_0^{2x} 1\ dy\, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{\log(3)}} e^{x^2} 2x\ dx \\ &= \left[e^{x^2}\right]_0^{\sqrt{\log(3)}} = e^{\log(3)} - 1 \\ &= 3 - 1 = 2.\end{aligned}$$

5 Potential

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ der Weg $\gamma(t) = (t^3, t^2+t, t)$ von $\gamma(0) = (0,0,0)$ nach $\gamma(1) = (1,2,1)$. Berechne für die folgenden Vektorfelder $v(x,y,z)$ das Integral

$$\int_\gamma v \; d\gamma$$

und untersuche, ob die Vektorfelder ein Potential besitzen (falls ja, berechne es).

a) $v(x,y,z) = (2xy^3, 3x^2y^2 + 2yz, y^2)$

Lösung: Wir versuchen zuerst ein Potential zu bestimmen, weil damit dann auch das Wegintegral berechnet werden kann. D.h. wir suchen f so, dass $\nabla f = v$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \overset{!}{=} 2xy^3 \implies f(x,y,z) = x^2y^3 + g(y,z)$$

für eine Funktion $g(y,z)$ die nur von y und z abhängt, nicht aber von x.
Einsetzen in die Bedingung für $\frac{\partial f}{\partial y}$ liefert

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) \overset{!}{=} 3x^2y^2 + 2yz \implies g(y,z) = y^2z + h(z)$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y^2 + h'(z) = y^2 \implies h(z) = c.$$

Die Funktion

$$f(x,y,z) = x^2y^3 + y^2z$$

ist also ein Potential und für das Integral erhalten wir

$$\int_\gamma v \cdot d\vec{s} = f(1,2,1) - f(0,0,0) = 12.$$

b) $v(x,y,z) = (x+z, x+y+z, x+z)$.

Lösung: Wir behaupten, dass v kein Potential besitzt. Aus der Bedingung $\frac{\partial f}{\partial x} = x+z$ folgt $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + zx + g(y,z)$. Dies widerspricht aber der Bedingung $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} \overset{!}{=} x+y+z$, da g nur von y und z abhängig ist.
Wir rechnen das Wegintegral via Defintion aus:

$$\int_\gamma v \; d\gamma = \int_0^1 v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^3+t \\ t^3+t^2+2t \\ t^3+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 3t^5 + 2t^4 + 7t^3 + 5t^2 + 3t dt = \tfrac{349}{60}.$$