1 Multiple Choice Fragen

a) Welches der folgenden Integrale ist *nicht* gleich den anderen?

- ☐ $\int_0^1 \int_0^x x \; dydx$
- ☐ $\int_0^1 \int_0^y x \; dxdy$
- ☐ $\int_0^1 \int_0^y y \; dxdy$
- ☐ $\int_0^1 \int_y^1 x \; dxdy$

b) Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Das Integral

$$\int_Q f \; dx_1 \cdots dx_n$$

existiert.

- ☐ Wahr
- ☐ Falsch

2 Die Astroide

Sei $a > 0$. Die Astroide $A(a) \subset \mathbb{R}^2$ ist die geometrische Figur in der Ebene, die durch

$$A(a) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \right\}$$

definiert ist. Die Konstruktion einer Astroiden ist sehr geometrisch (siehe hier). Sei $B(a)$ die Menge

$$B(a) := \{(rx, ry) \subset \mathbb{R}^2 \mid r \in [0, 1], \; (x, y) \in A(a)\}.$$

Berechnen Sie mittels des Satzes von Green die Fläche von $B(a)$.

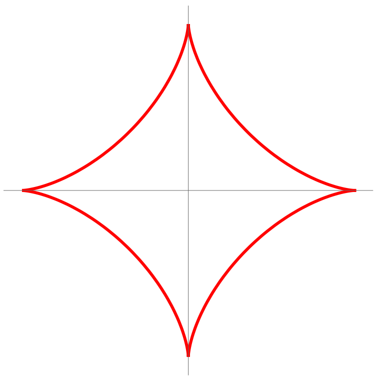


Abbildung 1: Die rote Astroid $A(1)$ ist der Rand von $B(a)$.

TIPP: Der Satz von Green gibt Fläche$(B(a)) = \int \int_{B(a)} 1 \; dxdy = \oint_{A(a)} x \; dy$.

3 Wegintegrale

Sei $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie Greens Satz um das Wegintegral[1]

$$\oint_\gamma v \, d\gamma$$

zu berechnen, wenn

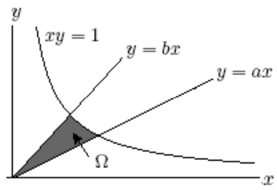
a) $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ist das Viereck mit den Ecken $(0,0),\ (2,0),\ (2,2),\ (0,2)$.

b) $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ist das Viereck mit den Ecken $(\pm 1, \pm 1)$.

c) $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ist der Kreis mit Radius 2 und Zentrum im Ursprung.

4 Integral

i) Berechne das Integral $\int_\Omega xy \, d\mu$ für den skizzierten Bereich Ω (wobei $b > a > 0$).



Berechne die folgenden Integrale

ii) $$\int_0^2 \int_y^{2y} (x + e^y) \, dx \, dy$$

iii) $$\int_1^2 \int_{\sqrt[3]{y}}^{y} x^2 y^2 \, dx \, dy$$

Eine englische Version dieser Übungsserie finden Sie auf der nächsten Seite

[1] Das Symbol $\oint$ heisst, dass wir die Kurve γ im Gegenuhrzeigersinn parametrisieren.

1 Multiple Choice Questions

a) Which of the following integrals does *not* equal the others.

- ☐ $\int_0^1 \int_0^x x \; dydx$
- ☐ $\int_0^1 \int_0^y x \; dxdy$
- ☐ $\int_0^1 \int_0^y y \; dxdy$
- ☐ $\int_0^1 \int_y^1 x \; dxdy$

b) Let $Q \subset \mathbb{R}^n$ be a compact set and let $f : Q \to \mathbb{R}$ be continuous. The integral

$$\int_Q f \; dx_1 \cdots dx_n$$

exists.

- ☐ True
- ☐ False

2 The Astroid

Let $a > 0$. The Astroid $A(a) \subset \mathbb{R}^2$ is the geometric figure in the plane defined by

$$A(a) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \right\}$$

The construction of an Astroid is very geometric (see here). Let $B(a)$ denote the set

$$B(a) := \{(rx, ry) \subset \mathbb{R}^2 \mid r \in [0, 1], \; (x, y) \in A(a)\}.$$

Compute the area of $B(a)$ using the theorem of Green.

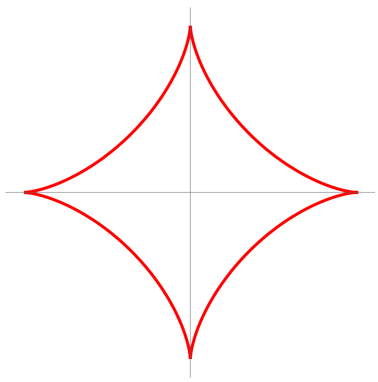


Abbildung 2: The red Astroid $A(1)$ is the boundary of $B(a)$.

HINT: The theorem of Green gives $\text{Area}(B(a)) = \int \int_{B(a)} 1 \; dxdy = \oint_{A(a)} x \; dy$.

3 Path integrals

Let $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denote the vectorfield

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix}.$$

Use Green's theorem to compute the path integral[2]

$$\oint_\gamma v \, d\gamma$$

in the following cases:

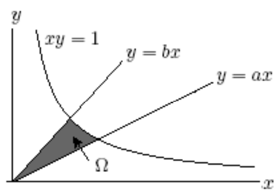
a) $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ is the square with corners $(0,0),\ (2,0),\ (2,2),\ (0,2)$.

b) $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ is the square with corners $(\pm 1, \pm 1)$.

c) $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ is the circle with radius 2 and center at the origin.

4 Integral

i) Compute the integral $\int_\Omega xy \, d\mu$ for the outlined domain Ω (where $b > a > 0$).



Compute the integrals

ii) $\displaystyle\int_0^2 \int_y^{2y} (x + e^y) \, dx \, dy$

iii) $\displaystyle\int_1^2 \int_{\sqrt[3]{y}}^{y} x^2 y^2 \, dx \, dy$

[2]The symbol $\oint$ indicates that the path γ is parametrized counterclockwise.