1 Multiple Choice Fragen

a) Welches der folgenden Integrale ist *nicht* gleich den anderen?

☐ $\int_0^1 \int_0^x x \; dydx$

☑ $\int_0^1 \int_0^y x \; dxdy$

☐ $\int_0^1 \int_0^y y \; dxdy$

☐ $\int_0^1 \int_y^1 x \; dxdy$

Lösung: Man bekommt das dritte Integral aus dem ersten, indem man x und y vertauscht. Damit sind die Integrale gleich. Die Grenzen im ersten und der vierten Integral sind $0 \leq y \leq x \leq 1$. Damit bekommt man das vierte Integral wenn man die Integrationsreihenfolge umtauscht. Nun folgt, dass das zweite Integral das richtige Antwort ist. Wir kontrollieren, dass

$$\int_0^1 \int_0^y x \; dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^y dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^1 = \frac{1}{6}$$
$$\int_0^1 \int_0^x x \; dydx = \int_0^1 x \int_0^x 1 \; dydx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{3},$$

so dass das erste und zweite Integral verschieden sind.

b) Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Das Integral

$$\int_Q f \; dx_1 \cdots dx_n$$

existiert.

☑ Wahr

☐ Falsch

2 Die Astroide

Sei $a > 0$. Die Astroide $A(a) \subset \mathbb{R}^2$ ist die geometrische Figur in der Ebene, die durch

$$A(a) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\right\}$$

definiert ist. Die Konstruktion einer Astroiden ist sehr geometrisch (siehe hier). Sei $B(a)$ die Menge

$$B(a) := \{(rx, ry) \subset \mathbb{R}^2 \mid r \in [0, 1], \; (x, y) \in A(a)\}.$$

Berechnen Sie mittels des Satzes von Green die Fläche von $B(a)$.
TIPP: Der Satz von Green gibt Fläche$(B(a)) = \int\int_{B(a)} 1 \; dxdy = \oint_{A(a)} x \; dy$.
Lösung: Eine Parametrisierung von $A(a)$ ist durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (a\cos^3(t), a\sin^3(t))$$

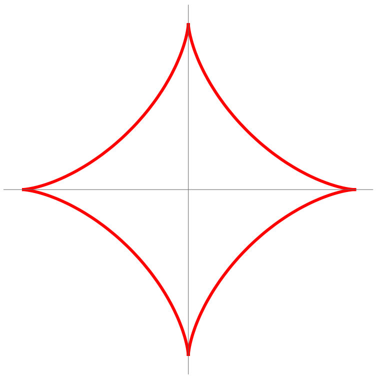


Abbildung 1: Die rote Astroid $A(1)$ ist der Rand von $B(a)$.

gegeben. Greens Satz gibt nun

$$\begin{aligned}\text{Fläche}(B(a)) &= \int\int_{B(a)} 1 \; dxdy = \oint_{A(a)} x \; dy \\ &= \int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\dot{\gamma}_2(t) \; dt \\ &= 3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^4(t)\sin^2(t) \; dt\end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Formeln

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}, \quad \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}.$$

Diese entsprechen

$$\cos^2(t)\sin^2(t) = \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)\left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right) = \frac{1-\cos^2(2t)}{4}$$

und damit

$$\begin{aligned}\cos^4(t)\sin^2(t) &= \cos^2(t)\cos^2(t)\sin^2(t) \\ &= \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)\left(\frac{1-\cos^2(2t)}{4}\right) \\ &= \frac{1-\cos^2(2t)+\cos(2t)-\cos^3(2t)}{8}.\end{aligned}$$

Nun folgt, dass

$$\begin{aligned}\text{Fläche}(B(a)) &= 3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^4(t)\sin^2(t) \; dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} 1-\cos^2(2t)+\cos(2t)-\cos^3(2t) \; dt \\ &= \frac{3a^2}{8}\left(2\pi - \int_0^{2\pi}\cos^2(2t) \; dt\right) = \frac{3a^2}{8}\left(2\pi - \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(4t)}{2} \; dt\right) \\ &= \frac{3a^2}{8}\left(2\pi - \pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(4t) \; dt\right) = \frac{3a^2\pi}{8}.\end{aligned}$$

Hier benutzen wir, dass $\cos(t) = -\cos(t+\pi)$, was

$$\int_0^{2\pi} \cos(4t)\ dt = \int_0^{2\pi} \cos(2t)\ dt = \int_0^{2\pi} \cos^3(2t)\ dt = 0$$

entspricht. Dies löst die Aufgabe.

3 Wegintegrale

Sei $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie Greens Satz um das Wegintegral[1]

$$\oint_\gamma v\ d\gamma$$

zu berechnen, wenn

a) $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ist das Viereck mit den Ecken $(0,0),\ (2,0),\ (2,2),\ (0,2)$.

Lösung: Wir können

$$\int_\gamma v\ d\gamma = \int_\gamma y^2 dx\ xdy$$

schreiben. Sei $Q := [0,2] \times [0,2]$. Wegen Greens Satz haben wir, dass

$$\int_\gamma v\ d\gamma = \int_\gamma \big(y^2 dx\ + xdy\big) = \int_Q (1-2y) dxdy = \int_0^2 \int_0^2 (1-2y)\ dxdy$$
$$= 2\int_0^2 (1-2y)\ dy = 2(2 - [y^2]_{y=0}^2) = 2(2-4) = -4$$

b) $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ist das Viereck mit den Ecken $(\pm 1, \pm 1)$.

Lösung: Sei $Q = [-1,1] \times [-1,1]$. Dann sagt Greens Satz noch ein Mal, dass

$$\int_\gamma v\ d\gamma = \int_Q (1-2y) dxdy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-2y)\ dxdy$$
$$= 2\int_{-1}^1 (1-2y)\ dy = 2(2 - [y^2]_{y=-1}^1) = 4.$$

c) $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ist der Kreis mit Radius 2 und Zentrum im Ursprung.

[1]Das Symbol $\oint$ heisst, dass wir die Kurve γ im Gegenuhrzeigersinn parametrisieren.

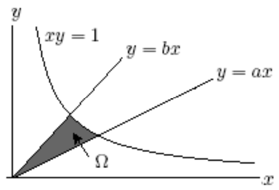
Lösung: Sei $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. Dann sagt Greens Satz noch ein Mal, dass

$$\begin{aligned}
\int_\gamma v \; d\gamma &= \int_Q (1 - 2y) dx dy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (1 - 2r \sin(\varphi)) r \; dr d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r - 2r^2 \sin(\varphi) \; dr d\varphi \\
&= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 - 2 \int_0^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi \\
&= 4\pi,
\end{aligned}$$

wobei wir in Polarkoordinaten umwechseln.

4 Integral

i) Berechne das Integral $\int_\Omega xy \, d\mu$ für den skizzierten Bereich Ω (wobei $b > a > 0$).



Lösung: Die Schnittpunkte sind

$$xy = 1 \text{ und } y = bx \to x = \frac{1}{\sqrt{b}}$$

$$xy = 1 \text{ und } y = ax \to x = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Wir teilen das Gebiet auf in die Bereiche $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{b}}$ und $\frac{1}{\sqrt{b}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$ und haben

$$\int f(x, y) d\mu = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \int_{ax}^{bx} f(x, y) dy dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \int_{ax}^{\frac{1}{x}} f(x, y) dy dx$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_\Omega xyd\mu &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\int_{ax}^{bx} xydydx + \int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\int_{ax}^{\frac{1}{x}} xydydx \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{b}}} x\frac{y^2}{2}\Big|_{ax}^{bx} dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} x\frac{y^2}{2}\Big|_{ax}^{\frac{1}{x}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \left(x(bx)^2 - x(ax)^2\right) dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \left(x\left(\frac{1}{x}\right)^2 - x(ax)^2\right) dx \\
&= \frac{b^2}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{b}}} x^3 dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \frac{1}{x}dx - \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} x^3 dx \\
&= \frac{b^2}{2}\frac{x^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{b}}} + \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} - \frac{a^2}{2}\frac{x^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \\
&= \frac{b^2}{2}\frac{1}{4b^2} + \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{\sqrt{a}}) - \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{\sqrt{b}}) - \frac{a^2}{2}\frac{1}{4a^2} \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{\sqrt{a}}) - \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{\sqrt{b}}) - \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(\frac{1}{\sqrt{a}}) - \ln(\frac{1}{\sqrt{b}})\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right).
\end{aligned}$$

Berechne die folgenden Integrale

ii) $\int_0^2\int_y^{2y}(x+e^y)\,dx\,dy$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_0^2\int_y^{2y}(x+e^y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{y=0}^2\left(\frac{1}{2}x^2 + e^y x\Big|_{x=y}^{x=2y}\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2\left(\frac{3}{2}y^2 + ye^y\right)\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\int_0^2 y^2\,\mathrm{d}y + \int_0^2 ye^y\,\mathrm{d}y \\
&= 4 + \left(ye^y|_0^2 - \int_0^2 e^y\,\mathrm{d}y\right) \\
&= 4 + 2e^2 - (e^2 - e^0) = 5 + e^2
\end{aligned}$$

iii) $\int_1^2\int_{\sqrt[3]{y}}^{y} x^2y^2\,dx\,dy$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_{\sqrt[3]{y}}^y x^2 y^2 \, dx dy &= \int_1^2 y^2 \Big(\int_{\sqrt[3]{y}}^y x^2 \, dx \Big) dy \\
&= \int_1^2 y^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=y^{1/3}}^{y} dy \\
&= \frac{1}{3} \int_1^2 \left(y^2 \cdot y^3 - y \cdot y^2 \right) \, dy \\
&= \frac{1}{3} \int_1^2 \left(y^5 - y^3 \right) \, dy = \frac{1}{3} \left[\frac{y^6}{6} - \frac{y^4}{4} \right]_{y=1}^{2} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{64-1}{6} - \frac{1}{4}(16-1) \right) = \frac{7}{2} - \frac{5}{4} \\
&= \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$