1 Multiple Choice Fragen

a) Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ der Einheitsball, dessen Rand $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion, so dass es eine Konstante $c \neq 0$ gibt, die

$$f(x, y) = c \quad \forall\ (x, y) \in S$$

erfüllt. Dann gilt

☐
$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = c$$

☐
$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

☐ Das Integral
$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy$$
lässt sich nicht mit den angegebenen Informationen berechnen.

b) Was ist der Schwerpunkt[1] $(\overline{x}, \overline{y})$ des Einheitsballs $D \subset \mathbb{R}^2$?

☐ $(\overline{x}, \overline{y}) = (1, 0)$
☐ $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 0)$
☐ $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 1)$

2 Integration durch substitution

Integrieren Sie die Funktion

$$f(x, y) = |x|\sqrt{x^2 + y^2}$$

über den in Abbildung 1 schraffierten Bereich Ω.

3 Integration

Wir benutzen die Notation aus Aufgabe 1a). Seien $u, w : D \to \mathbb{R}$ zwei C^1-Funktionen, so dass

$$u(x, y) = 1, \quad w(x, y) = y$$

für alle $(x, y) \in S$. Wir definieren nun zwei Vektorfelder $v_1, v_2 : D \to \mathbb{R}^2$ durch

$$v_1(x, y) = \begin{pmatrix} w(x, y) \\ u(x, y) \end{pmatrix}, \quad v_2(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_D v_1 \cdot v_2 \; dxdy, \tag{1}$$

wobei " · " das Skalarprodukt bezeichnet.

[1] *Schwerpunkt* heisst 'centroid' auf Englisch.

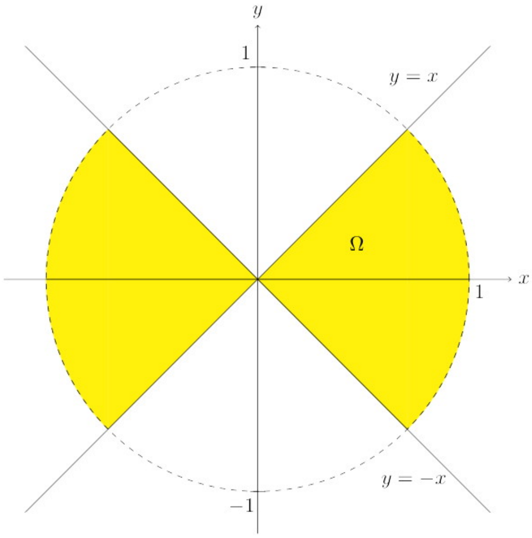


Abbildung 1:

4 Der Satz von Pappus

Seien A, B und C die folgenden 3 Vierecke in der (x, y)-Ebene

$$A := [0,4] \times [0,1], \quad B := [2,3] \times [1,3], \quad C := [2,4] \times [3,4].$$

Benutzen Sie den Satz von Pappus, um den Schwerpunkt[2] der folgenden Mengen auszurechnen.

a) $A \cup B$

b) $B \cup C$

c) $A \cup B \cup C$

Eine englische Version dieser Übungsserie finden Sie auf der nächsten Seite

[2] *Schwerpunkt* heisst 'centroid' auf Englisch.

1 Multiple Choice Questions

a) Let $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ denote the unit disc, whose boundary is given by $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$. Let $f : D \to \mathbb{R}$ be a C^1-function, so thet there exists a constant $c \neq 0$ for which

$$f(x,y) = c \quad \forall\ (x,y) \in S.$$

Then

☐
$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\ dxdy = c$$

☐
$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\ dxdy = 0$$

☐ The integral
$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\ dxdy$$
cannot be computed from the given information.

b) What is the centroid $(\overline{x}, \overline{y})$ of the unit disc $D \subset \mathbb{R}^2$?

☐ $(\overline{x}, \overline{y}) = (1,0)$

☐ $(\overline{x}, \overline{y}) = (0,0)$

☐ $(\overline{x}, \overline{y}) = (0,1)$

2 Integration by substitution

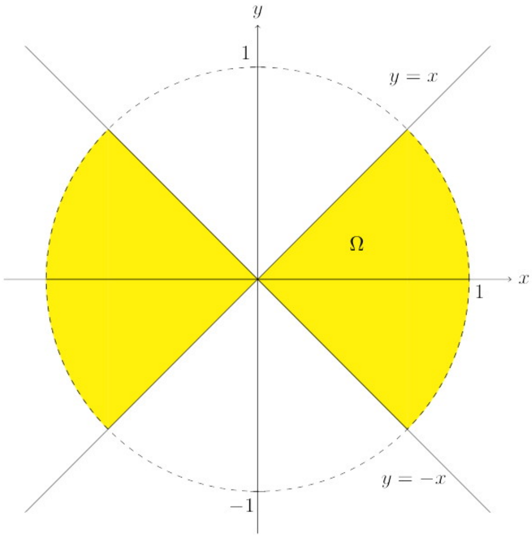
Integrate the function
$$f(x,y) = |x|\sqrt{x^2+y^2}$$
over the colored domain Ω indicated in the figure on the next page.

3 Integration

We use the notation from question 1a). Let $u, w : D \to \mathbb{R}$ be two C^1-functions, so that
$$u(x,y) = 1, \quad w(x,y) = y$$
for every $(x,y) \in S$. We define two vectorfields $v_1, v_2 : D \to \mathbb{R}^2$ by

$$v_1(x,y) = \begin{pmatrix} w(x,y) \\ u(x,y) \end{pmatrix}, \quad v_2(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Compute
$$\int_D v_1 \cdot v_2\ dxdy, \tag{2}$$
where " · " denotes the scalar product.



4 The Theorem of Pappus

Let A, B and C be the following rectangles in the (x, y)-plane

$$A := [0,4] \times [0,1], \quad B := [2,3] \times [1,3], \quad C := [2,4] \times [3,4].$$

Use the theorem of Pappus in order to compute the centroid of the following sets.

a) $A \cup B$

b) $B \cup C$

c) $A \cup B \cup C$