1 Multiple Choice Fragen

a) Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ der Einheitsball, dessen Rand $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ ist. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion, so dass es eine Konstante $c \neq 0$ gibt, die

$$f(x,y) = c \quad \forall\ (x,y) \in S$$

erfüllt. Dann gilt

☐
$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)\ dxdy = c$$

☑
$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)\ dxdy = 0$$

☐ Das Integral
$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)\ dxdy$$
lässt sich nicht mit den angegebenen Informationen berechnen.

Lösung: Wir wenden den Satz von Green an mit $P = Q = f$. Eine Parametrisierung von S ist durch $\gamma : [0, 2\pi] \to S$,

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

gegeben. Damit gibt Green

$$\begin{aligned}\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)\ dxdy &= \int_S f(dx+dy) = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))(\cos'(t) + \sin'(t))\ dt \\ &= c \int_0^{2\pi} \cos(t) - \sin(t)\ dt = 0.\end{aligned}$$

b) Was ist der Schwerpunkt[1] $(\overline{x}, \overline{y})$ des Einheitsballs $D \subset \mathbb{R}^2$?

☐ $(\overline{x}, \overline{y}) = (1, 0)$
☑ $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 0)$
☐ $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 1)$

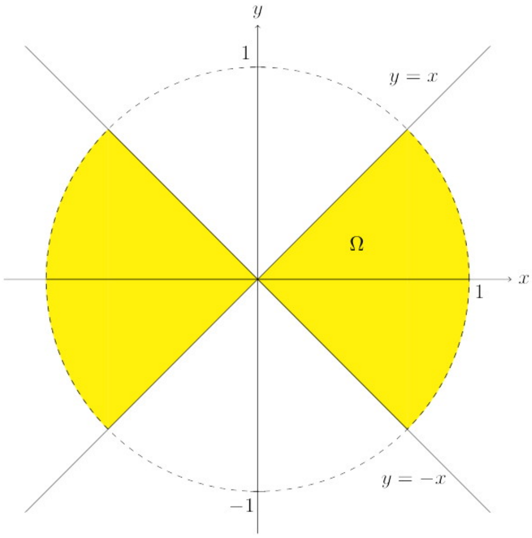
2 Integration durch substitution

Integrieren Sie die Funktion

$$f(x,y) = |x|\sqrt{x^2+y^2}$$

über den in der Abbildung schraffierten Bereich Ω.

[1] *Schwerpunkt* heisst 'centroid' auf Englisch.



Lösung: Ω besteht aus 4 Teilmengen

$$\begin{aligned}
\Omega_{++} &:= \{(x,y) \in \Omega \mid x, y \geq 0\} \\
\Omega_{+-} &:= \{(x,y) \in \Omega \mid x \geq 0,\ y \leq 0\} \\
\Omega_{--} &:= \{(x,y) \in \Omega \mid x, y \leq 0\} \\
\Omega_{-+} &:= \{(x,y) \in \Omega \mid x \leq 0,\ y \geq 0\}
\end{aligned}$$

Da $\Omega \cap \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ eine Nullmenge[2] ist, gilt

$$\int_\Omega f(x,y)\ dxdy = \int_{\Omega_{+-}} f(x,y)\ dxdy + \int_{\Omega_{++}} f(x,y)\ dxdy \tag{1}$$

$$+ \int_{\Omega_{--}} f(x,y)\ dxdy + \int_{\Omega_{-+}} f(x,y)\ dxdy. \tag{2}$$

Sei $h(x,y) = (x,-y)$. Dann gilt $h(\Omega_{++}) = \Omega_{+-}$ und die Substitutionsformel gibt

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{+-}} f(x,y)\ dxdy &= \int_{h(\Omega_{++})} f(x,y)\ dxdy \\
&= \int_{\Omega_{++}} f \circ h(x,y) |\det(Dh)(x,y)|\ dxdy \\
&= \int_{\Omega_{++}} f(x,y)\ dxdy,
\end{aligned}$$

wobei wir benutzen, dass $f \circ h(x,y) = f(x,-y) = f(x,y)$ und $\det(Dh) \equiv -1$. Eine ähnliche Berechnung gibt

$$\int_{\Omega_{++}} f(x,y)\ dxdy = \int_{\Omega_{-+}} f(x,y)\ dxdy = \int_{\Omega_{--}} f(x,y)\ dxdy.$$

[2] *Nullmenge* heisst 'has content 0' auf Englisch.

Damit folgt aus (1), dass

$$\int_{\Omega} f(x,y)\ dxdy = 4\int_{\Omega_{++}} f(x,y)\ dxdy$$

Auf Ω_{++} haben wir $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$. Mit den Polarkoordinaten $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $dxdy = rdrd\phi$ folgt

$$\int_{\Omega_{++}} f(x,y)dx\,dy \quad = \quad \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \cos\phi dr\, d\phi = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 [\sin\phi]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}},$$

und somit

$$\int_{\Omega} f(x,y)\ dxdy = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

was die Aufgabe löst.

3 Integration

Wir benutzen die Notation aus Aufgabe 1a). Seien $u, w : D \to \mathbb{R}$ zwei C^1-Funktionen, so dass

$$u(x,y) = 1, \quad w(x,y) = y$$

für alle $(x,y) \in S$. Wir definieren nun zwei Vektorfelder $v_1, v_2 : D \to \mathbb{R}^2$ durch

$$v_1(x,y) = \begin{pmatrix} w(x,y) \\ u(x,y) \end{pmatrix}, \quad v_2(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_D v_1 \cdot v_2\ dxdy, \tag{3}$$

wobei " · " das Skalarprodukt bezeichnet.
Lösung: Wir berechnen

$$v_1 \cdot v_2 = w\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial(wu)}{\partial x} - \frac{\partial(wu)}{\partial y}.$$

Damit lässt sich (3) mittels des Satzes von Green berechnen:

$$\begin{aligned}\int_D v_1 \cdot v_2\ dxdy &= \int_D \frac{\partial(wu)}{\partial x} - \frac{\partial(wu)}{\partial y}\ dxdy \\ &= \int_S uw(dx+dy) = \int_S y(dx+dy).\end{aligned}$$

Sei nun $\gamma : [0, 2\pi] \to S$ die Parametrisierung aus Aufgabe 1a). Dann folgt,

$$\begin{aligned}\int_D v_1 \cdot v_2\ dxdy &= \int_S y(dx+dy) = \int_0^{2\pi} \sin(t)(-\sin(t)+\cos(t))\ dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\ dt + \int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\ dt.\end{aligned}$$

Wegen der Periodizität haben wir $\int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\ dt = 0$ und das erste Integral lässt sich mittels der Formel

$$\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

berechnen:

$$\begin{aligned}\int_D v_1 \cdot v_2\ dxdy &= -\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\ dt = \frac{-1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos(2t))\ dt \\ &= -\frac{2\pi}{2} = -\pi.\end{aligned}$$

Hier benutzen wir, das die Periodizität von cos $\int_0^{2\pi} \cos(2t)\ dt = 0$ entspricht. Dies löst die Aufgabe.

4 Der Satz von Pappus

Seien A, B und C die folgenden 3 Vierecke in der (x, y)-Ebene

$$A := [0,4] \times [0,1], \quad B := [2,3] \times [1,3], \quad C := [2,4] \times [3,4].$$

Benutzen Sie den Satz von Pappus, um den Schwerpunkt[3] der folgenden Mengen auszurechnen.

a) $A \cup B$

b) $B \cup C$

c) $A \cup B \cup C$

Lösung: Wir bezeichnen mit $a(X)$ die Fläche einer Menge $X \subset \mathbb{R}^2$. Offensichtlich haben wir

$$a(A) = 4, \quad a(B) = 2, \quad a(C) = 2.$$

Wir bezeichnen mir $V(Y)$ das Volumen einer Menge $Y \subset \mathbb{R}^3$. Für eine Menge $D \subset [0,\infty) \times [0,\infty)$ bezeichnen wir mit $S(D,x)$ (bzw. $S(D,y)$) die Körper in $\mathbb{R}^3$, die man bekommt wenn man D um die x-Achse (bzw. y-Achse) dreht. Im Fall $a(D) > 0$ sagt der Satz von Pappus, dass

$$\overline{x}(D) = \frac{V(S(D,y))}{2\pi a(D)}, \quad \overline{y}(D) = \frac{V(S(D,x))}{2\pi a(D)}, \tag{4}$$

wobei $(\overline{x}(D), \overline{y}(D))$ den Schwerpunkt von D bezeichnet.

Wir berechnen nun $V(S(D,x)), V(S(D,y))$ für $D = A, B, C$. In jedem Fall benutzen wir, dass D entweder ein Zylinder, oder die Differenz zweier Zylinder ist.

$$\begin{aligned}V(S(A,x)) &= 4\pi \\ V(S(A,y)) &= 4^2\pi = 16\pi \\ V(S(B,x)) &= 3^2\pi - \pi = 9\pi - \pi = 8\pi \\ V(S(B,y)) &= 2(3^2\pi - 2^2\pi) = 2(9\pi - 4\pi) = 10\pi \\ V(S(C,x)) &= 2(4^2\pi - 3^2\pi) = 2(16\pi - 9\pi) = 14\pi \\ V(S(C,y)) &= 4^2\pi = 2^\pi = (16-4)\pi = 12\pi.\end{aligned}$$

[3] *Schwerpunkt* heisst 'centroid' auf Englisch.

a) Offensichtlich haben wir

$$a(A \cup B) = a(A) + a(B) = 6$$

und

$$V(S(A \cup B, x)) = V(S(A, x)) + V(S(B, x)) = 4\pi + 8\pi = 12\pi$$

und damit folgt wegen (4)

$$\overline{y}(A \cup B) = \frac{12\pi}{2\pi \cdot 6} = 1.$$

Ähnlich erhalten wir

$$V(S(A \cup B, y)) = V(S(A, y)) + V(S(B, y)) = 16\pi + 10\pi = 26\pi$$

was

$$\overline{x}(A \cup B) = \frac{26\pi}{2\pi \cdot 6} = \frac{13}{6}$$

entspricht.

b) Es gelten

$$a(B \cup C) = a(B) + a(C) = 4$$

und

$$V(S(B \cup C, x)) = V(S(B, x)) + V(S(C, x)) = 8\pi + 14\pi = 22\pi,$$

was

$$\overline{y}(B \cup C) = \frac{22\pi}{2\pi \cdot 4} = \frac{11}{4}$$

entspricht. Weiter haben wir

$$V(S(B \cup C, y)) = V(S(B, y)) + V(S(C, y)) = 10\pi + 12\pi = 22\pi,$$

was

$$\overline{x}(B \cup C) = \frac{22\pi}{2\pi \cdot 4} = \frac{11}{4}$$

entspricht.

c) Es gelten

$$a(A \cup B \cup C) = a(A) + a(B) + a(C) = 8$$

und

$$V(S(A \cup B \cup C, x)) = V(S(A, x)) + V(S(B, x)) + V(S(C, x)) = 4\pi + 8\pi + 14\pi = 26\pi,$$

was

$$\overline{y}(A \cup B \cup C) = \frac{26\pi}{2\pi \cdot 8} = \frac{13}{8}$$

entspricht. Weiter haben wir

$$V(S(A \cup B \cup C, y)) = V(S(A, y)) + V(S(B, y)) + V(S(C, y)) = 16\pi + 10\pi + 12\pi = 38\pi,$$

was

$$\overline{x}(A \cup B \cup C) = \frac{38\pi}{2\pi \cdot 8} = \frac{19}{8}$$

entspricht. Dies löst die Aufgabe.